

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 8-9 классов

(Правильное и полное решение каждой задачи оценивается в 20 баллов)

1. По кругу записано 75 различных чисел, причем произведение любых двух соседних чисел не является положительным. Для каждого из 75 чисел рассмотрим произведение числа и его двух соседей. Сколько из них может быть положительных?

Ответ: 37.

Решение. Если ни одно из чисел не равно нулю, то произведение соседних чисел отрицательно и, значит, соседние числа имеют противоположные знаки. Поэтому числа стоящие через одно имеют одинаковые знаки, т. е. одного знака первое, третье, пятое, ..., 75-е числа. Первое и 75-е числа стоят рядом, но их произведение положительно, что противоречит условию. Таким образом, среди чисел есть ровно один ноль, а соседние ненулевые числа имеют противоположные знаки. Разрежем круг по числу ноль. В получившейся полоске знаки чисел чередуются $+-+ \dots +-$ или $-+-+ \dots -+$. Для таких расстановок произведение числа и его двух соседей будет положительным в точности когда это число отрицательно. А таких чисел ровно 37.

2. Каждое натуральное число окрашено в синий или красный цвет. Сумма любых двух разноцветных чисел — синее число, а их произведение — красное число. Какого цвета произведение двух красных чисел?

Ответ: красного.

Решение. Пусть r_1 и r_2 красные числа, а b — синее число. Тогда $r_1 + b$ — синее число, а $r_1 r_2 + r_2 b = r_2(r_1 + b)$ — красное число. Кроме того $r_2 b$ — красное число. Если бы число $r_1 r_2$ было бы синим, то сумма $r_1 r_2 + r_2 b$ также была бы синим, что не так. Следовательно, $r_1 r_2$ — красное число.

3. Положительные числа a и b удовлетворяют неравенству $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{9}$. Докажите, что

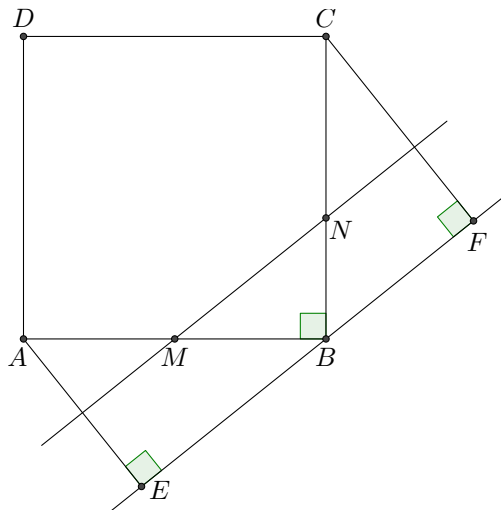
$$ab + a \leq \frac{8}{9}.$$

Решение. По неравенству о средних для двух чисел $\frac{a^2}{4} + b^2 \geq ab$ и $\frac{3a^2}{4} + \frac{1}{3} \geq a$. Следовательно,

$$ab + a \leq \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right) + \left(\frac{3a^2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + a^2 + b^2 \leq \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{8}{9}.$$

4. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Через M провели прямую, она пересекла сторону BC в точке N . Оказалось, что расстояние от точки A до прямой MN равно 3, а расстояние от точки C до прямой MN равно 8. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

Ответ: 157.



Решение. Через вершину B проведем прямую, параллельную MN . Опустим на нее перпендикуляры из точек A и C , обозначим их основания через D и E . Поскольку прямая MN параллельна DE , она является средней линией треугольника ABE и, значит, пересекает сторону AE в ее середине. Поэтому $AE = 6$ и расстояние между прямыми MN и EF равно 3. Следовательно, $CF = 8 + 3 = 11$. Прямоугольные треугольники ABE и BCF равны по сторонам и углу, поэтому $BE = CF = 11$. Таким образом, $AB^2 = AE^2 + BE^2 = 6^2 + 11^2 = 157$.

5. В стране 2025 городов. Между некоторыми городами построены дороги с односторонним движением, а между 2 городами может быть несколько дорог в разных направлениях. Для любых двух городов A и B можно добраться (возможно через какие-то другие города) либо из A в B , либо из B в A , либо из A в B и из B в A . Для какого наименьшего n можно утверждать, что всегда можно так построить n новых дорог, что в любой город можно будет добраться из любого другого города?

Ответ: при $n = 1$.

Решение. Сначала приведем пример, когда одну дорогу придется построить. Занумеруем города числами от 1 до 2025. Пусть из каждого города k есть дорога в город $k + 1$ (конечно $1 \leq k \leq 2024$). Условие задачи выполнено, но из второго города в первый не добраться. Поэтому нужно построить хотя бы одну дорогу.

Докажем теперь, что всегда можно построить одну дорогу так, что из любого города можно будет попасть в любой другой. Рассмотрим город X , из которого можно приехать в наибольшее количество городов страны. Предположим, что существует город A , в который не приехать из города X . По условию тогда из города A можно добраться до города X . Но тогда из города A можно приехать и во все города, в которые можно было приехать из города X , а еще можно добраться и до города X . Это противоречит выбору города X , как города, из которого можно приехать в наибольшее количество городов. Таким образом, из города X можно добраться во все города страны.

Аналогично, существует такой город Y , в который можно приехать из любого города страны. Тогда если построить дорогу из Y и X , то для любых двух городов A и B появится способ добраться из A в B . А именно, нужно сначала приехать из A в Y , затем по новой дороге переместиться из Y в X и наконец из X приехать в B .

6. Найдите все простые числа p , для которых существует ровно пять таких натуральных чисел n , что $n^3 + p^2$ делится на $n + p$.

Ответ: $p = 5$.

Решение. Поскольку $n^3 + p^3$ всегда делится на $n + p$, число

$$(n^3 + p^3) - (n^3 + p^2) = p^3 - p^2 = p^2(p - 1)$$

делится на $n + p$ в точности когда $n^3 + p^2$ делится на $n + p$.

Если n не делится на p , то $n + p$ также не делится на p и, значит, числа p и $n + p$ взаимно просты. Тогда число $p - 1$ должно делиться на $n + p$, но это невозможно так как $n + p > p - 1 > 0$. Следовательно, n кратно p . Тогда $n = mp$ для некоторого натурального числа k . Число $p^2(p - 1)$ делится на $n + p = (m + 1)p$ в точности когда $p(p - 1)$ делится на $m + 1$. Таким образом, если d — отличный от единицы делитель числа $p(p - 1)$, то число $m = d - 1$ подходит, т.е. $n = (d - 1)p$ удовлетворяет условию. Таким образом, у произведения $p(p - 1)$ должно быть в точности шесть натуральных делителей. Для $p = 2$ таких делителей два, а для $p = 3$ — четыре, поэтому $p \geq 5$. Для $p = 5$ число $p(p - 1) = 20$ имеет в точности шесть натуральных делителей, поэтому $p = 5$ подходит. Пусть $p \geq 7$, тогда $p = 2k + 1$ при некотором $k \geq 3$ и произведение $p(p - 1)$ равно $2k(2k + 1)$. Но это число имеет не меньше восьми натуральных делителей: 1, 2, k , $2k$, $2k + 1$, $2(2k + 1)$, $k(2k + 1)$ и $2k(2m + 1)$, поэтому такие p не подходят.