

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 10-11 классов

1. На столе в ряд стоит 40 чашек, занумерованных слева направо числами от 1 до 40. В каждой чашке лежит не более 10 вишен, а количество вишен в любых соседних чашках отличается ровно на один. В чашках с номерами 1, 4, 7, 10, $\dots$, 40 вместе 125 вишен. Какое наибольшее количество вишен может быть во всех чашках?

2. вещественные числа a , b и c удовлетворяют условию $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Найдите наибольшее значение выражения $ab + bc - ca$.

3. Три простые числа p , q и r больше трех и удовлетворяют условию $2p + 5q = r$. Для какого наибольшего n число $p + q + r$ всегда будет делиться на n ?

4. Пусть Ω и Γ — две такие окружности с центрами O и P соответственно, что окружность Γ проходит через точку O . На окружности Γ вне окружности Ω выбрана точка M . Касательные к Ω , проходящие через M , касаются Ω в точках A и B и вторично пересекают Γ в точках C и D . Отрезки AB и CD пересекаются в точке E . Докажите, что прямые PE и CD перпендикулярны.

5. В школе m учеников. У директора есть много карточек с числами от 1 до 100. Он раздал карточки ученикам так, что ученик мог получить несколько карточек (возможно, ни одной или одну), при этом каждый ученик получил не более чем одну карточку каждого вида. Любые два ученика получили разные наборы карточек. Оказалось, что если карточка с числом k ($1 \leq k \leq 100$) есть более чем у 100 учеников, то она есть хотя бы у $m - 100$ учеников. При каком наибольшем m такое возможно?