

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 6-7 классов

1. По кругу в некотором порядке выписаны числа от 1 до 25. Разрешается взять несколько чисел, стоящих подряд, (но не все) и заменить их на их произведение. Можно ли при помощи таких операций сделать все числа на окружности равными? Если да — то объясните, как это сделать, если нет — объясните, для какой начальной расстановки и почему это невозможно.

2. Бульдозеристы Аз и Бук играют на карте (см. рисунок, кружки — это деревни, а линии — дороги). Сначала Аз ставит свой бульдозер в любую деревню по своему выбору и проезжает по любой дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню. Дорога при этом разрушается. Потом Бук ставит свой бульдозер в любую деревню (в том числе, можно выбирать деревню, где был или находится Аз), проезжает по любой неразрушенной дороге, выходящей из этой деревни, в соседнюю деревню и оставляет там свой бульдозер (там может уже стоять бульдозер Аза).

Далее ходы выполняются по очереди. Каждым ходом игрок должен переместить свой бульдозер по еще не разрушенной дороге в соседнюю деревню (там может стоять бульдозер другого игрока), при этом дорога разрушается. Если игрок не может сделать ход из-за того, что все дороги, выходящие из деревни, разрушены, он считается проигравшим.

Кто из игроков — Аз или Бук — выигрывает при правильной игре вне зависимости от действий другого игрока? Приведите подробное объяснение его стратегии.

3. Существуют ли три натуральных числа x, y, z , удовлетворяющих уравнению

$$17^x + 4 \cdot 17^y = z^2 ?$$

Если да — приведите пример такой тройки чисел, если нет — объясните, почему решений нет.

4. Вдоль дороги в некотором порядке стоят 32 столба, высотой 1, 2, ..., 32 м. Если среди столбов, расположенных между какими-то двумя несоседними столбами A и B , хотя бы один столб выше, чем A или B (в том числе, если он выше, чем оба столба A и B), то электрик соединяет столбы A и B кабелем. Известно, что электрик, пользуясь этим правилом, проложил все возможные кабели. Например, если бы стояло только 6 столбов в порядке высот 5, 3, 6, 2, 1, 4, то электрик проложил бы 6 кабелей:

$$(5, 2), (5, 1), (5, 4), (3, 2), (3, 1), (3, 4).$$

а) Приведите пример расположения столбов, в котором всего будет протянут 461 кабель.

б) Какое наибольшее число кабелей может быть?

в) Докажите, что электрик протянул не меньше 435 кабелей.

5. Помик выписал все возможные равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, ни одно из которых не делится на 75. Калуща выписала равенства, где число 2025 представлено в виде суммы нескольких слагаемых, но ни одно слагаемое не повторяется больше 74 раз. (Предполагается, что слагаемые во всех суммах располагаются по убыванию.) Например, у Помика встречается первое равенство, а у Калущи второе:

$$2025 = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{1000 \text{ раз}} + 25, \quad 2025 = \underbrace{150 + 150 + \dots + 150}_{13 \text{ раз}} + \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{25 \text{ раз}}.$$

Докажите, что у них получилось поровну равенств.