

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Заключительный этап. 2024/2025 учебный год

Примеры заданий для 8-9 классов

1. По кругу записано 75 различных чисел, причем произведение любых двух соседних чисел не является положительным. Для каждого из 75 чисел рассмотрим произведение числа и его двух соседей. Сколько из них может быть положительных?

2. Каждое натуральное число окрашено в синий или красный цвет. Сумма любых двух разноцветных чисел — синее число, а их произведение — красное число. Какого цвета произведение двух красных чисел?

3. Положительные числа a и b удовлетворяют неравенству $a^2 + b^2 \leq \frac{5}{9}$. Докажите, что

$$ab + a \leq \frac{8}{9}.$$

4. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Через M провели прямую, она пересекла сторону BC в точке N . Оказалось, что расстояние от точки A до прямой MN равно 3, а расстояние от точки C до прямой MN равно 8. Найдите площадь квадрата $ABCD$.

5. В стране 2025 городов. Между некоторыми городами построены дороги с односторонним движением, а между 2 городами может быть несколько дорог в разных направлениях. Для любых двух городов A и B можно добраться (возможно через какие-то другие города) либо из A в B , либо из B в A , либо из A в B и из B в A . Для какого наименьшего n можно утверждать, что всегда можно так построить n новых дорог, что в любой город можно будет добраться из любого другого города?

6. Найдите все простые числа p , для которых существует ровно пять таких натуральных чисел n , что $n^3 + p^2$ делится на $n + p$.