

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2024/2025 учебный год

Задания для 10–11 классов

1. (10 баллов) *Арендатору в квартире нужны 152 розетки, а пока есть только 9. Арендодатель предлагает просто купить побольше удлинителей. В магазине продаются удлинители на 9 розеток за 810 рублей, удлинители на 5 розеток за 400 рублей, удлинители на 8 розеток за 700 рублей. Какое наименьшее количество денег придётся потратить арендодателю, чтобы арендатор получил нужное количество розеток?*

Ответ: 14300.

Решение. Заметим, что удлинитель на A розеток увеличивает имеющееся количество розеток на $A - 1$, так как сам имеет A розеток, но в одну розетку его самого нужно включить. Пусть закуплено X удлинителей на 9 розеток, Y удлинителей на 5 розеток и Z удлинителей на 8 розеток. Необходимо минимизировать выражение $810X + 400Y + 700Z$ при ограничении $9 + (9 - 1)X + (5 - 1)Y + (8 - 1)Z \geq 152 \Leftrightarrow 8X + 4Y + 7Z \geq 143$.

Удельная стоимость розеток в удлинителях на 5 и на 8 розеток одинаковая — $\frac{400}{5-1} = \frac{700}{8-1} = 100$ и она меньше, чем удельная стоимость розетки в удлинителе на 9 розеток — $\frac{810}{9-1}$. То есть в идеале нужно «набрать» необходимые 143 розетки самыми дешевыми. Легко заметить, что, например, $143 = 4 \cdot 34 + 7 \cdot 1$ или $143 = 4 \cdot 27 + 7 \cdot 5$. Таким образом, можно, например, купить 34 удлинителя на 5 розеток и 1 удлинитель на 8 розеток, потратив на это $34 \cdot 400 + 1 \cdot 700 = 14300$ рублей.

2. (10 баллов) *Натуральные числа a и b таковы, что $ab > 127a + 534b$. При каком наибольшем натуральном N можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a и b не меньше N ?*

Ответ: 662.

Решение. Условие переписывается в виде $(a - 534)(b - 127) > 127 \cdot 534$. Если каждое из чисел не больше $127 + 534$, то произведение слева не больше числа справа. Значит, хотя бы одно из чисел не меньше $127 + 534 + 1 = 662$.

3. (10 баллов) *У натурального числа N ровно 4 натуральных делителя, при этом какие-то два из них отличаются на 157. Чему может быть равно N ? Если вариантов ответа несколько, в ответе укажите их сумму.*

Ответ: 472.

Решение. Условие, что у числа имеется ровно 4 делителя, означает, что помимо единицы и самого себя число делится только на некоторое x и некоторое, другое, y . Причем, если $x < y$, то x — простое, а y — либо тоже простое, либо является квадратом x . Иначе у числа были бы другие, отличные от x и y делители.

Рассмотрим первый случай когда $x > 2$, то есть простое нечетное. Тогда отличаться на 157:

- x от 1 не может, так как оказалось бы четным;
- y от x , и от 1 — не может, так как было бы четным, а значит число N делилось бы на $2 < x$;
- N от x , и от 1 — не может, так как оказалось бы четным, что противоречит предположению $x > 2$;
- N от y не может, так как y — нечетное (либо простое, либо степень нечетного x) и снова получилась бы четность N .

Следовательно, $x = 2$ и поэтому $N = 2y$. Исследуем варианты:

- $y - x = 157 \Rightarrow y = 157 + 2 = 159 = 3 \cdot 53$ — противоречие (слишком много делителей);
- $y - 1 = 157 \Rightarrow y = 158 = 2 \cdot 79$ — противоречие;
- $N - x = 157 \Rightarrow N = 159 = 3 \cdot 53$ — противоречие;
- $N - 1 = 157 \Rightarrow N = 158 = 2 \cdot 79$ — этот вариант подходит, здесь $y = 79$;
- $N - y = 157$ и $N = 2y \Rightarrow y = 157 \Rightarrow N = 314$.

Таким образом, имеем два подходящих N : 158 и 314. В ответе указываем их сумму.

4. (20 баллов) Найдите все натуральные числа N , для которых выполнено равенство $\text{НОК}(5040, N) = \text{НОД}(5040, N) + 100080$. В ответе укажите сумму всех подходящих значений. В частности, если таких чисел нет, укажите 0, а если оно только одно — его самого.

Ответ: 14400.

Решение. Заметим, что $5040 = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, а $100080 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 139$. Поскольку НОК чисел делится на каждое из них, то левая часть условия делится на $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, то есть представима в виде $720 \cdot 7\lambda$ при некотором натуральном λ . Так как второе слагаемое правой части — это $720 \cdot 139$, то имеем условие:

$$720(7\lambda - 139) = \text{НОД}(5040, N).$$

НОД должен быть натуральным числом, поэтому $\lambda \geq 20$. Легко видеть, что λ не может быть больше 20, так как иначе НОД оказался бы больше, чем 5040 (например, при $\lambda = 21$ мы бы получили, что $\text{НОД}(5040, N) = 720(7 \cdot 21 - 139) = 720 \cdot 8 = 5760$, чего быть не может).

Таким образом, $\text{НОД}(5040, N) = 8 \cdot 9 \cdot 10$, а $\text{НОК}(5040, N) = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 20$. Поскольку $\text{НОК}(5040, N) \times \text{НОД}(5040, N) = 5040 \cdot N = (7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 20) \cdot (8 \cdot 9 \cdot 10)$, то $N = \frac{(7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 20) \cdot (8 \cdot 9 \cdot 10)}{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 20 = 14400$.

5. (20 баллов) 13 детей получили суммарно 1144 конфеты, причём количества конфет, полученных детьми, — последовательные натуральные числа. Раз в минуту один из детей, кто может отдать каждому из остальных детей по конфете, делал это (если таких детей было несколько, то делал только один из них). Через некоторое время у одного из детей оказалось n конфет. При каком наибольшем n это возможно?

Ответ: 1078.

Решение. Поскольку по условию количества конфет у 13 детей изначально образуют последовательность натуральных чисел, то при делении на 13 они дают 13 разных остатков. Операция «отдать каждому из остальных детей по конфете» может быть представлена как две операции:

- 1) отделить от имеющегося количества конфет 13 штук (если конфет у данного ребенка ровно 12, то одну конфету отделить мысленно);
- 2) отделенные конфеты разделить между всеми, включая себя, поровну, то есть каждому ребенку по 1 конфете (если была отделенная мысленно конфета, то она возвращается владельцу).

Теперь заметим, что первая операция не меняет остатки конфет при делении на 13, потому что у 12 детей вообще ничего не происходит, а у отдающего отделяются 13 конфет; вторая операция увеличивает все остатки на 1, то есть как было 13 разных остатков, так и останется.

Отсюда получаем, что максимальное количество конфет, которое может скопиться у одного ребенка — это ситуация, когда у всех остальных детей количество конфет равно 0, 1, 2, ..., 10, 11 — это 12 разных, и минимальных, остатков при делении на 13. Следовательно, у 13-го ребенка будет $1144 - (0 + 1 + 2 + \dots + 10 + 11) = 1144 - 66 = 1078$ конфет.

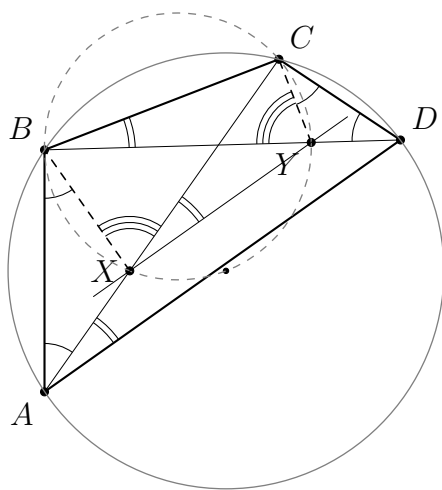
6. (20 баллов) Равносторонний треугольник разбит на 1004 меньших равносторонних треугольника, из которых ровно 1003 имеют сторону 1. Найдите все возможные

значения, которые может принимать сторона исходного треугольника. Если вариантов ответа несколько, в ответе укажите их сумму.

Ответ: 540.

Решение. Заметим, что «другой» треугольник, со стороной не 1, хотя бы по одной своей стороне соприкасается с одним или несколькими треугольниками, имеющими сторону 1, поэтому его сторона будет каким-либо натуральным числом. Известно, что равносторонний треугольник со стороной k разбивается на k^2 равносторонних треугольников со стороной 1. Пусть сторона исходного треугольника равна n , а сторона «другого» из меньших треугольников равна k . Тогда $n^2 = k^2 + 1003$. Отсюда получаем, что $(n - k)(n + k) = 17 \cdot 59$. Это уравнение в натуральных числах при $k < n$ имеет два решения: либо $n - k = 17$ и $n + k = 59$, то есть $n = 38$ и $k = 21$; либо $n - k = 1$ и $n + k = 1003$, откуда $n = 502$ и $k = 501$. Следовательно, ответ — $38 + 502 = 540$.

7. (30 баллов) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. На отрезках AC и BD нашлись такие точки X и Y соответственно, что $XA = XB$ и $YD = YC$. Докажите, что $XY \parallel AD$.



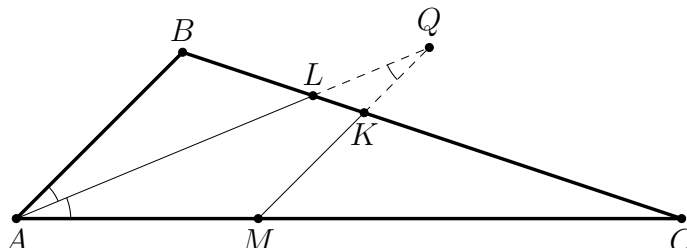
Решение. Поскольку $XA = XB$, то треугольник XAB является равнобедренным с основанием AB , поэтому $\angle XAB = \angle XBA$. Аналогично, треугольник YCD является равнобедренным с основанием CD и $\angle YCD = \angle YDC$. Так как $ABCD$ вписанный четырёхугольник, то $\angle BAC = \angle BDC$. Следовательно, в треугольниках XAB и YCD все углы при основаниях равны. Отсюда, $\angle AXB = \angle DYC$.

Углы, смежные с данными, также будут равны: $\angle BXC = \angle CYD$. Но оба эти угла опираются на хорду BC и их вершины лежат по одну сторону от неё, поэтому

эти углы будут вписанными для окружности, проходящей через точки B , C , X и Y . Поэтому, как вписанные для этой окружности, будут равны $\angle CXY$ и $\angle CBY = \angle CBD$. Но $\angle CBD = \angle CAD$, так как $ABCD$ вписанный четырехугольник. Но $\angle CXY$ и $\angle CAD$ — соответствующие углы при прямых XY и AD и секущей AX . Из равенства этих углов получаем параллельность прямых.

8. (30 баллов) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC . Точки K и M на отрезках CL и AC таковы, что $KM \parallel AB$. Найдите длину отрезка KL , если $KM = 5$, $AM = 8$, $AB = 7$, $BL = 32/5$.

Ответ: $96/35$.



Решение. Продлим MK до пересечения с AL в точке Q . Тогда получим, что треугольник AMQ равнобедренный с основанием AQ , а треугольники ABL и KLQ подобны по трем углам. Поскольку $MA = MQ$, то $KQ = 8 - 5 = 3$. Соотношения для длин сторон подобных треугольников:

$$\frac{AB}{KQ} = \frac{LB}{LK} = \frac{KA}{LQ}.$$

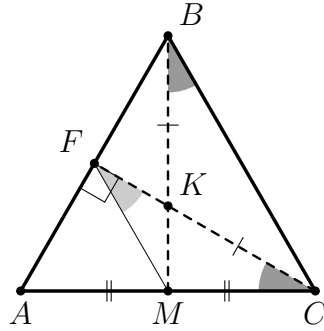
Отсюда получаем, что

$$KL = \frac{LB \cdot KQ}{AB} = \frac{\frac{32}{5} \cdot 3}{7} = \frac{32 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{96}{35}.$$

9. (30 баллов) В треугольнике ABC проведены высота CF и медиана BM . Известно, что $\angle MBC = \angle FCA$ и $BM = CF$. Верно ли, что треугольник ABC — равнобедренный?

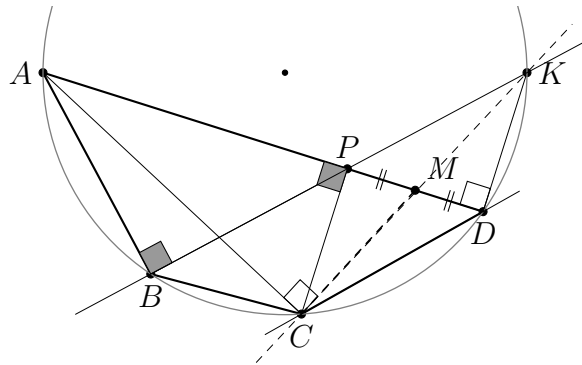
Ответ: Да.

Решение. В прямоугольном треугольнике AFC медиана FM равна половине гипотенузы AC . Следовательно, треугольник MFC равнобедренный с основанием FC и $\angle MFC = \angle MCF$. Так как углы MFC и MBC равны, опираются на один и тот же отрезок MC и лежат по одну сторону от него, то четырехугольник $MFBC$ вписанный. Отсюда получаем, что $\angle FBM = \angle FCM$ (и равен $\angle MBC$). Таким образом, BM в треугольнике ABC является биссектрисой и медианой (по условию), то есть треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC .



Теперь рассмотрим два прямоугольных треугольника: AFC и BMC (BM является ещё и высотой). У них равны катеты FC и BM и прилежащие у них углы ($\angle AFC = \angle BMC = 90^\circ$, $\angle FCA = \angle MBC$ по условию). Следовательно, эти треугольники равны. Отсюда, $AC = BC$. И окончательно получаем, что $AB = BC = AC$.

10. (30 баллов) На стороне AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P такая, что $\angle APC = \angle ABP = 90^\circ$ и $BP \parallel CD$. Пусть M — середина PD . Докажите, что $\angle ACM = 90^\circ$.



Решение. Так как $\angle ABP$ вписанный и прямой, то он опирается на диаметр описанной окружности четырёхугольника $ABCD$. Обозначим через K — точку, диаметрально противоположную точке A . Таким образом, точки B , P и K будут лежать на одной прямой, параллельной прямой CD (по условию).

Теперь заметим, что $\angle ADK$ — вписанный угол той же окружности, следовательно, он прямой; то есть $DK \perp AD$. Но по условию $PC \perp AD$, отсюда получаем, что $PC \parallel DK$. Таким образом, $PCDK$ — параллелограмм и точка M — точка пересечения его диагоналей. Поэтому точки C , M и K лежат на одной прямой, а $\angle ACK$ — вписанный угол, опирающийся на диаметр.

11. (40 баллов) На доске написано число $1/n$. Один ход состоит в том, что к числителю

и знаменателю дроби прибавляется по 1, после чего дробь сокращают (конечно, если она сократима). Может ли второе сокращение произойти ровно на 77-м ходу?

Ответ: Нет.

Решение. Пусть дробь впервые сократилась на k -ом шаге. Это значит, что $1 + k$ и $n + k$ имеют общий делитель d . Но тогда и $(n + k) - (k + 1) = n - 1$ имеет делитель d . Очевидно, подойдет $k = p - 1$, где p — наименьший простой делитель числа $n - 1$. Так как на $(p - 1)$ -ом шаге числитель и знаменатель будут иметь общий делитель, а на всех предыдущих — нет.

Заметим, что после сокращения дробь будет иметь числитель 1 и знаменатель n/p , поэтому можно аналогично доказать, что следующее сокращение будет на шаге $q - 1$, где q — наименьший простой делитель n/p .

Если второе сокращение произошло на 77-м ходу, то $p - 1 + q - 1 = 77$, то есть $p + q = 79$. Оба числа не могут нечетными, поэтому одно из них четное и простое, то есть равно 2. Но тогда второе должно быть равно 77, что не является простым числом.

12. (40 баллов) Для любых натуральных чисел $a > b$ докажите, что

$$\text{НОД}(a - 1, b + 1) \cdot \text{НОД}(a, b) \leq a + b.$$

Решение. Так как $a + b = (a - 1) + (b + 1)$, то $a + b$ делится на $\text{НОД}(a - 1, b + 1)$. И аналогично $a + b$ делится на $\text{НОД}(a, b)$. Но при этом НОДы взаимно просты, так как один из них является делителем a , а второй — делителем $a - 1$. Следовательно, сумма $a + b$ делится и на произведение НОДов, а тогда она не меньше этого произведения.

13. (40 баллов) Несколько экспертов оценивают 5 фильмов оценками от 0 до 10. Известно, что для любых двух экспертов найдётся хотя бы два фильма, за каждый из которых эксперты поставили разные оценки. Какое наибольшее число экспертов может быть?

Ответ: 11^4 .

Решение. Оценка. Каждый фильм можно оценить 11-ю способами (от 0 до 10). Поэтому всевозможных наборов оценок для первых четырех фильмов — 11^4 . Покажем, что количество экспертов не может быть больше этого числа: если бы экспертов было больше, то по принципу Дирихле нашлись бы двое из них, чьи оценки первых четырех фильмов идентичны; а, значит, могут различаться только оценки пятого фильма. А это противоречит условию о том, что любая пара экспертов отличается в оценках как минимум двух фильмов.

Пример. Рассмотрим все наборы оценок, сумма которых делится на 11. Таких наборов ровно 11^4 , так как для каждого способа выбрать первые 4 оценки есть ровно

один способ дополнить их пятой оценкой до суммы, кратной 11. Любые два такие набора отличаются хотя бы в двух позициях, так как если совпали 4 позиции и сумма по модулю 11, то совпала и пятая позиция.

14. (40 баллов) *Существует ли натуральное число n , для которого числа $n^4 + 4$ и $(n + 2)^4 + 4$ взаимно просты?*

Ответ: Нет.

Решение. Преобразуем выражение: $n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Аналогично, $(n + 2)^4 + 4 = ((n + 2)^2 - 2(n + 2) + 2)((n + 2)^2 + 2(n + 2) + 2) = (n^2 + 2n + 2)(\dots)$. То есть мы нашли у двух чисел общий делитель $n^2 + 2n + 2$, который, очевидно, больше 1.

15. (40 баллов) *Числа от 1 до 2568 расположены в строку в порядке убывания. За один ход разрешается либо:*

1. *поменять местами любое чётное число с соседним;*
2. *либо, если подряд идут три нечётных числа, поменять местами первое и третье из них.*

Можно ли с помощью таких действий переставить числа так, чтобы они были упорядочены по возрастанию?

Ответ: Нет.

Решение. Будем смотреть только на расположение нечетных чисел относительно друг друга. Тогда первая операция не влияет на это расположение. Изначально число 1 на первом месте среди нечетных. При следующих операциях номер единицы среди нечетных будет либо не меняться, либо изменяться на 2. Но в конце она должна оказаться на $2568/2 = 1284$ месте среди нечетных. Очевидно, что изменениями на 2 нельзя из 1 получить 1284.

16. (40 баллов) *В компании из 734 человек некоторые пары людей враждуют между собой (вражда взаимна). Известно, что у каждого в компании не более 19 врагов. Докажите, что можно разбить всех людей на не более чем 5 групп так, что количество пар врагов, оказавшихся в одной группе, будет не более 1101.*

Решение. Рассмотрим разбиение людей не более чем на 5 групп с наименьшим числом пар врагов внутри групп. Если у кого-то из людей в своей группе хотя бы 4 врага, то найдется другая группа, в которой у него не более 3 врагов (иначе врагов было бы $\geq 4 \cdot 5 = 20$). Тогда можно переместить этого человека в другую группу и уменьшить суммарное количество врагов. Следовательно, у каждого не более 3 врагов в его группе. Тогда всего пар врагов внутри групп не более $734 \cdot 3/2 = 1101$, что и требовалось.