

Олимпиада школьников СПбГУ по математике

Примеры заданий отборочного этапа

2024/2025 учебный год

Задания для 6–7 классов

1. (15 баллов) *В информационной системе Университета Сказочного Содружества сохранение анкеты абитуриента требует ровно 10 минут; при этом каждая третья анкета сохраняется не с первого раза, а только со второго. Во время сохранения анкеты абитуриента секретарь приемной комиссии ходит вокруг стола с компьютером со скоростью 5 км/ч. Сколько километров пройдет секретарь приемной комиссии за время, необходимое для сохранения анкет 1800 абитуриентов?*

Ответ: 2000.

Решение. На сохранение каждой трех анкет необходимо $10 + 10 + 10 \cdot 2 = 40$ минут (так как первые две анкеты из рассматриваемой тройки сохраняются с первого раза, на что потребуется 20 минут, а третья анкета сохранится только со второго раза, то есть действие «сохранить» с этой анкетой нужно будет совершить дважды — на что потребуется ещё 20 минут). 1800 анкет разбиваются на 600 троек (в данном случае нацело). Отсюда получаем, что на все анкеты потребуется $600 \cdot 40 \text{ мин} = 24000 \text{ мин} = 400 \text{ часов}$.

За это время секретарь комиссии пройдет $400 \text{ часов} \cdot 5 \text{ км/ч} = 2000 \text{ км}$.

2. (15 баллов) *Фирма изготавливает сладости из тертого какао, сахара, масла какао и молока, не используя другие ингредиенты. На упаковке товара необходимо указывать процентное содержание какао. Однако, это может быть как процент всех какао-продуктов от общей массы товара, так и процент тертого какао от общей массы какао-продуктов.*

Чему равна разность между первой и второй из этих величин, если для изготовления партии сладостей было использовано 14 кг тертого какао, 2 кг сахара, 2 кг масла какао и 2 кг молока? В ответе запишите число с точностью до трех знаков после запятой, без указания знака процента.

Ответ: $-7,5$.

Решение. Обозначим вес использованного тертого какао через x , сахар через y , масла какао через z , молока через d . Тогда первая величина, процент всех какао-продуктов от общей массы продуктов, это $\frac{x+z}{x+y+z+d} \cdot 100\%$. Вторая величина, процент тертого какао от общей массы какао-продуктов, это $\frac{x}{x+z} \cdot 100\%$.

Ответ на вопрос задачи: разность первой и второй величинами. В нашем случае это

$$\left(\frac{14 + 2}{14 + 2 + 2 + 2} - \frac{14}{14 + 2} \right) \cdot 100\% = 80\% - 87,5\% = -7,5\%.$$

3. (35 баллов) *У братьев Васи и Феди живут три кота: Потапыч, Ушастик и Шустрик. Потапыча нужно гладить 30 минут в день, причем без перерыва. Ушастика — 40 минут в день, но можно прерываться раз в 10 минут, хотя и не обязательно. Шустрика — 60 минут в день и можно прерываться раз в 15 минут, но тоже не обязательно.*

То есть, например, можно гладить Ушастика 10 минут, а потом еще 30 минут; но нельзя 15 минут и 25 минут. Какое минимальное количество времени (в минутах) ежедневно требуется, чтобы погладить всех трех котов? (Братья могут одновременно гладить двух котов: Вася одного кота, а Федя какого-то другого.)

Ответ: 65.

Решение. Поскольку одновременно могут гладиться два кота, то общее время не может быть меньше, чем $(30 + 40 + 60) : 2 = 65$ минут.

Проверим, что эта оценка достигается (построим пример). Считаем, что братья начинают гладить котов одновременно.

Вася: гладит Шустрика 15 минут, потом Потапыча 30 минут, потом Ушастика 20 минут. Итого 65 минут.

Федя: гладит Ушастика 20 минут, потом Шустрика 45 минут. Итого тоже 65 минут.

Отметим, что пример корректен, то есть никакой кот не гладится одновременно обоими братьями (Ушастика сначала гладит Федя 20 минут, а через 25 минут гладит Вася тоже в течение 20 минут. Шустрика сначала гладит Вася 15 минут, а через 5 минут гладит Федя в течение 45 минут).

4. (35 баллов) *Катя, Саша, гном-хамелеон и 12 голубей сидят на скамейке. Катя и Саша ведут беседу: на каждые 5 фраз Кати в ответ Саша говорит одну; начинается беседа Катя. Если номер высказанной в беседе фразы делится на 4, то один из голубей улетает. Окраска гнома-хамелеона зависит от количества голубей на скамейке: а) если оно больше 6 и четное, то окраска белая; б) если меньше 6 и четное, то окраска черная; в) если оно нечетное, то окраска красная; г) в остальных случаях окраска зеленая. Какого цвета будет окраска гнома после 4-й фразы Саши?*

Ответ: зелёной.

Решение. Так как начинает беседу Катя, то сначала она произнесет 5 фраз, потом Саша произнесет одну, затем 5 фраз опять произнесет Катя, а потом одну Саша и так далее. Таким образом, четвертая фраза Саши — это 24-я фраза всей беседы.

Количество голубей на скамейке уменьшается на одного голубя каждые 4 фразы, то есть во время четвертой фразы Саши улетит $24 : 4 = 6$ голубей. Значит на скамейке останется $12 - 6 = 6$ голубей. Такое количество голубей попадает под случай г).

5. (50 баллов) Пункты A и B находятся в левом нижнем и правом верхнем углах соответственно поля размером 10×15 клеточек. Игроку необходимо переместиться из пункта A в пункт B , двигаясь только по сторонам клеточек и не выходя за пределы поля. За один ход можно передвинуться на одну клеточку в любом доступном направлении и на три клеточки — в направлении перпендикулярном первому (то есть ход — это перемещение буквой «Г», возможно, перевернутой).

За какое наименьшее количество ходов игрок может переместиться из A в B ? Если такое перемещение невозможно, то докажите почему.

Ответ: указанными ходами переместиться из A в B нельзя.

Решение. Ход — это изменение координат текущего положения игрока. Если первое перемещение совершено по горизонтали, то координаты могут измениться четырьмя способами: $(+1, +3)$, $(+1, -3)$, $(-1, +3)$, $(-1, -3)$. Если первое перемещение совершено по вертикали, то также возможно 4 варианта изменения координат: $(+3, +1)$, $(+3, -1)$, $(-3, +1)$, $(-3, -1)$.

Заметим, что сумма координат будет изменяться на: $+4, -4, +2, -2$. То есть сумма координат не меняет своей четности. Если пункт A имеет координаты (x, y) , то пункт B будет иметь координаты $(x + 15, y + 10)$ или $(x + 10, y + 15)$. Легко заметить, что четность суммы координат у пунктов A и B разная. Следовательно, указанными ходами переместиться из A в B нельзя.

6. (50 баллов) Клетки доски $N \times N$ покрашены в три цвета: белый, чёрный и зелёный. Известно, что на этой доске можно выбрать различных ровно 194 прямоугольника размером 1×3 , причем все прямоугольники будут трехцветными, то есть не будут содержать клетки одинаковых цветов. Например, на доске 3×3 можно выбрать различных три горизонтальных и различных три вертикальных прямоугольника размера 1×3 .

Найдите наименьшее N , при котором это возможно.

Ответ: 11.

Решение. Выбрать наибольшее количество полностью разноцветных прямоугольников указанного размера можно при «шахматной» раскраске доски, то есть когда все возможные такие прямоугольники будут из клеток трех разных цветов. Такая раскраска доски получается, например, следующим образом: первую строку красим белый-чёрный-зеленый и далее по кругу; вторую строку, начиная с чёрного:

чёрный-зелёный-белый и далее повторяем; третью опять со сдвигом на один цвет: зелёный-белый-чёрный и повторяем.

Если описывать процесс раскраски математически, то можно рассуждать так. Пронумеруем строки и столбцы доски числами от 1 до N , а клеткам сопоставим сумму номера строки и номера столбца, в которых лежит клетка. Тогда клетки первой строки будут иметь номера от 2 до $N + 1$, клетки второй строки — номера от 3 до $N + 2$ и так далее. Красим следующим образом: если номер клетки дает остаток 2 при делении на 3 — в белый, если делится на 3 без остатка — в черный, если остаток 1 при делении на 3 — в зеленый.

Теперь заметим следующее. Любой прямоугольник 1×3 содержит три клетки подряд — либо горизонтальные, либо вертикальные; но номера этих клеток в обоих случаях идут подряд. При горизонтальных клетках — у них одинаковый номер строки, но номера столбцов — три подряд идущих; в вертикальном случае наоборот. Это значит, что такие клетки будут покрашены в разные цвета, то есть прямоугольник из них составленный будет трехцветным. Следовательно, «шахматная» раскраска действительно делает все возможные прямоугольники 1×3 трехцветными.

Очевидно, что если доска небольшого размера, то выбрать указанное количество прямоугольников не получится. Вычислим, какое максимальное количество прямоугольников можно выбрать на таком образом покрашенной доске. Поскольку доска квадратная, то есть число строк равно числу столбцов, то будем рассматривать только одну строку, а потом полученное выражение просто умножим на $2N$. (N — число строк, 2 — так как нужно рассматривать не только строки, но и столбцы). Если мы будем располагать прямоугольники, начиная с первой клеточки строки, то их в строке поместится $\lfloor N/3 \rfloor$; если начиная со второй клеточки, то $\lfloor (N - 1)/3 \rfloor$; если начиная с третьей, то $\lfloor (N - 2)/3 \rfloor$ ($\lfloor x \rfloor$ — целая часть числа x , то есть наибольшее целое, не превосходящее x). Значит всего на доске можно выбрать $2N \cdot (\lfloor N/3 \rfloor + \lfloor (N - 1)/3 \rfloor + \lfloor (N - 2)/3 \rfloor)$ прямоугольников размера 1×3 . Поэтому значения N , при которых это выражение меньше 194, точно не подходят.

В случае, когда $N = 10$ максимальное количество трехцветных прямоугольников размера 1×3 , которые можно выбрать, будет равно 160. Когда $N = 11$ — 198.

Но для наименьшего N , для которого это выражение не меньше 194, нужно проверить достижимость оценки, то есть привести пример раскраски доски указанного размера, когда можно выбрать ровно 194 разноцветных прямоугольников.

Отметим следующее:

- изменение цвета угловой клетки в «шахматной раскраске» влияет на «разноцветность» ровно двух прямоугольников (тех, в которые она входит) — крайнего

по строке и крайнего по столбцу;

- изменение цвета клетки на стороне рядом с угловой влияет на «разноцветность» ровно трех прямоугольников — двух во одном измерении (по стороне) и одной по другому;
- изменение цвета клетки на стороне (внутри) влияет на изменение «разноцветности» четырех прямоугольников — уже трех по стороне и одного в перпендикулярном направлении;
- максимальное влияние изменения цвета одной клетки, когда она располагается внутри доски, не менее чем в трех строках и столбцах от края, тогда портится «разноцветность» шести прямоугольников.

Таким образом, чтобы на доске 11×11 можно было выбрать ровно 194 разноцветных прямоугольника 1×3 , нужно, например, у двух угловых клеток доски изменить окраску на любую неправильную.