

Олимпиада школьников СПбГУ по математике
Примеры заданий отборочного этапа
2024/2025 учебный год

Задания для 8–9 классов

1. (10 баллов) Последовательность (x_n) задана соотношением: $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{2 - x_{n-1}}$ для каждого натурального n . Чему равно $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2023}$?
- а) 1
б) 2023
в) $1/2023$
г) $1/2024$
д) другой ответ

Ответ: г)

Решение. Выпишем несколько первых членов последовательности в явном виде:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2 - x_0} = \frac{1}{2},$$
$$x_2 = \frac{1}{2 - x_1} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{2 - x_2} = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}, \dots$$

Пусть $x_{k-1} = \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}$. Тогда

$$x_k = \frac{p_k}{q_k} = \frac{1}{2 - x_{k-1}} = \frac{1}{2 - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{1}{\frac{2q_{k-1} - p_{k-1}}{q_{k-1}}} = \frac{q_{k-1}}{2q_{k-1} - p_{k-1}}.$$

Таким образом, видим, что числитель нового члена последовательности — это знаменатель предыдущего члена последовательности. И при этом четность знаменателя нового члена последовательности совпадает с четностью числителя предыдущего члена последовательности. Поэтому

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{2023} = \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} \cdot \dots \cdot \frac{p_{2023}}{q_{2023}} =$$
$$= \frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{q_1}{2q_1 - p_1} \cdot \frac{2q_1 - p_1}{3q_1 - 2p_1} \cdot \frac{3q_1 - 2p_1}{4q_1 - 3p_1} \cdot \dots \cdot \frac{2022q_1 - 2021p_1}{2023q_1 - 2022p_1} = \frac{p_1}{2023q_1 - 2022p_1}.$$

Поскольку $p_1 = 1$, а $q_1 = 2$, то получаем

$$\frac{p_1}{2023q_1 - 2022p_1} = \frac{1}{2023 \cdot 2 - 2022} = \frac{1}{4046 - 2022} = \frac{1}{2024}.$$

2. (10 баллов) 20 человек писали тест, результат которого — некоторое натуральное число. Известно, что Саша набрал на 98 баллов больше, чем средний балл остальных участников. А на сколько больше набрал Саша по сравнению со средним баллом всех участников?

- а) 98;
- б) 4,9;
- в) 93,1;
- г) 22,3;
- д) другой ответ.

Ответ: в)

Решение. Пусть $\{a_i\}$ — результаты теста, причем a_1 — результат Саши. Тогда по условию

$$a_1 - \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_{20}}{19} = 98,$$

а в задаче необходимо вычислить

$$a_1 - \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{20}}{20}.$$

Приведем левую часть первого выражения к общему знаменателю:

$$\frac{19a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{20}}{19} = 98.$$

Таким образом, $19a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{20} = 98 \cdot 19$. Заметим, что левая часть второго, искомого, выражения, это $\frac{20a_1 - a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_{20}}{20}$, т. е. $\frac{19a_1 - a_2 - \dots - a_{20}}{20}$. И, следовательно,

$$\frac{19a_1 - a_2 - \dots - a_{20}}{20} = \frac{98 \cdot 19}{20} = 93,1.$$

3. (20 баллов) Жора выписал на доску все натуральные числа $k > 1$, не превосходящие 20, для которых верно следующее утверждение: «Если клетчатый прямоугольник можно разрезать по клеткам на k равных (по форме) частей, то этот же прямоугольник можно разрезать по клеткам и на меньшее k (но большее 1) количество равных частей». Сколько чисел выписал Жора?

Ответ: 11.

Решение. Пусть площадь прямоугольника равна S . Заметим, что если прямоугольник можно разрезать на t равных частей, то $S = t \cdot s_t$, где s_t — площадь одной t -й части (так как части равны по форме, то они равны и по площади).

По условию, если $S = k \cdot s_k$, то и $S = n \cdot s_n$, причем $1 < n < k$; и истинность утверждения не зависит от величины S . Это означает, что n является делителем k . То есть выписаны могут быть только составные числа.

Теперь покажем, что любое составное число будет выписано. Пусть прямоугольник имеет размеры $N \times M$ клеточек. Следовательно, $S = N \cdot M = k \cdot s_k = (p \cdot q) \cdot s_k$, где p — наименьшее простое в разложении числа k , а q — соответствующий множитель. Поскольку произведение N и M делится на p , то либо N , либо M , либо они оба делятся на p . Пусть, для определенности, на p делится N . То есть сторона прямоугольника

длиной N может быть поделена на p равных частей. Значит, исходный прямоугольник можно по клеточкам разрезать на p прямоугольничков размера $p \times M$ (режем по стороне длины N параллельно стороне длины M). Таким образом мы получили, что если исходный прямоугольник разрезан на k частей, где k составное, то он может быть разрезан и на меньшее число равных частей.

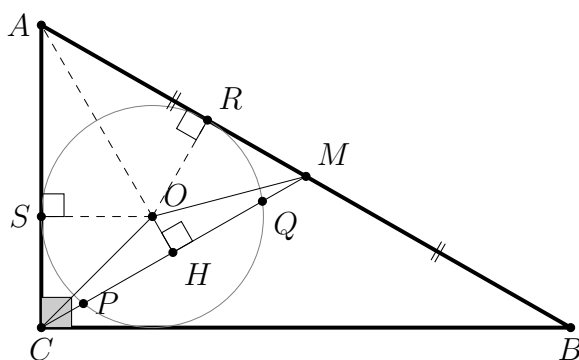
Составные натуральные числа, не превосходящие 20, это 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 и 20. Их 11 штук.

4. (20 баллов) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2042. За один ход можно дописать на доску квадрат какого-то числа на доске, либо НОК двух чисел на ней. Какое наименьшее составное число нельзя записать на доску?

Ответ: 2048.

Решение. Будем действовать последовательно. Число 2043 — простое. Число $2044 = 2 \cdot 2 \cdot 511$, то есть является НОК(4, 511). Далее, $2045 = 5 \cdot 409$, $2046 = 2 \cdot 3 \cdot 341 = \text{НОК}(6, 341)$, 2047 — простое. Число $2048 = 2^{11}$ и это не квадрат какого-либо из записанных чисел, так как 11 — нечетное, и не НОК, так как $\text{НОК}(2^{10}, 2^k) = 2^{10}$, $k < 10$.

5. (30 баллов) Медиана CM прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) пересекает вписанную окружность в двух точках P и Q . Известно, что $CP = MQ$. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен 60° .



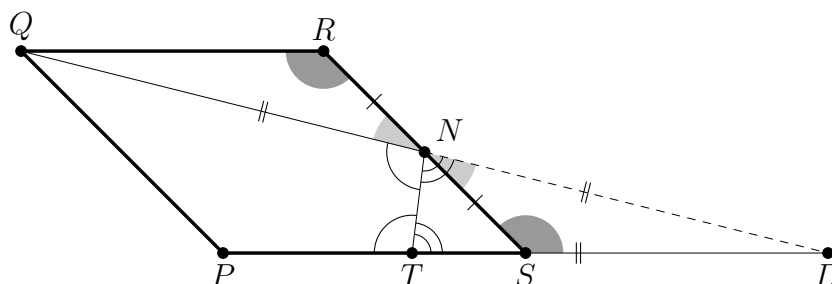
Решение. Поскольку медиана CM пересекает вписанную окружность прямоугольного треугольника в двух точках (а не в одной), то данный треугольник не является равнобедренным и центр вписанной окружности не лежит на медиане. Пусть, для определенности, центр O лежит внутри треугольника ACM и пусть точка P лежит между C и Q (как на рисунке).

Заметим, что OH — серединный перпендикуляр к хорде PQ . Следовательно, $CH = CP + PH = HQ + QM = HM$. Отсюда получаем, что прямоугольные треугольники OHC и OHM равны. Поэтому $OC = OM$.

Пусть R и S — проекции точки O на AB и AC соответственно (поскольку O лежит внутри остроугольного треугольника CAM , то её проекция R будет лежать на AM), то есть $OS = OR$ как радиусы вписанной окружности. Следовательно, в прямоугольных треугольниках OSC и ORM равны гипотенузы и катеты, то есть получаем, что $SC = RM$. Отсюда, $AC = AS + SC = AR + RM = AM$. То есть треугольник CAM равнобедренный с основанием CM . Но $AM = CM$, так как по условию CM — медиана прямоугольного треугольника. Следовательно, в треугольнике CAM равны все стороны и угол CAM , являющийся и углом треугольника ABC , будет равен 60° .

6. (30 баллов) В параллелограмме $PQRS$ точка N — середина стороны RS . На стороне PS нашлась точка T такая, что $\angle PTN = \angle QNT$. Известно, что $PT = 5$, а $TS = 3$. Найдите длину отрезка QN .

Ответ: 11.



Решение. Продлим прямую QN за точку N до пересечения с прямой PS . Точку пересечения обозначим за D . Треугольники NRQ и NSD равны (так как $NR = NS$, $\angle QNR = \angle SND$ как вертикальные, $\angle QRN = \angle NSD$ как накрест лежащие при параллельных прямых QR и PS и секущей QN). Следовательно, $NQ = ND$.

По условию $\angle PTN = \angle QNT$. Отсюда получаем, что $\angle DTN = \angle DNT$ как смежные с равными. Получаем, что треугольник DNT равнобедренный с основанием NT ; следовательно, $DT = DN$.

Поскольку прямые SR и PQ параллельны (из условия), то треугольники DSN и DPQ подобны по трем углам, а так как $NS = \frac{1}{2}SR = \frac{1}{2}PQ$, то есть коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Поэтому $DS = \frac{1}{2}DP = PS = PT + TS = 5 + 3 = 8$. Отсюда получаем, что $QN = ND = DT = DS + ST = 8 + 3 = 11$.

7. (30 баллов) В равнобокой трапеции $ABCD$ (сторона BC параллельна стороне AD) известно, что $\angle ACD = 111^\circ$ и $BC + CD = AD$. Найдите величину угла $\angle BDA$.

Ответ: 9° .

Решение. Очевидно, что $BC < AD$. Пусть B' и C' — основания перпендикуляров, опущенных из вершин B и C на AD соответственно. Таким образом, $B'C' = BC$ и $AB' = C'D$. Следовательно, так как $AB' + B'C' + C'D = AD = BC + CD$, то $2C'D = CD$, то есть в прямоугольном треугольнике $CC'D$ катет $C'D$ в два раза меньше гипотенузы CD . Отсюда получаем, что $\angle CDC' = 60^\circ$. Поэтому для треугольника ACD получаем, что $\angle CAD = 180^\circ - \angle ACD - \angle CDA = 180^\circ - 111^\circ - 60^\circ = 9^\circ$. Так как трапеция равнобокая, то $\triangle ABD = \triangle ACD$, следовательно, $\angle BDA = \angle CAD = 9^\circ$.

8. (40 баллов) По кругу стоят 20 человек, каждый из которых или зелёный, или красный. Каждый красный человек всегда говорит правду, а каждый зелёный человек врёт. Назовём двух человек, между которыми стоят не более двух человек, близкими; т. е. у каждого человека ровно 6 близких. Каждый человек заявил: «Среди моих близких хотя бы 2 зелёных человека». Какое наибольшее количество зелёных человек может быть?

Ответ: 8.

Решение. Заметим, что так как зелёный человек всегда врёт, то на самом деле у него не более одного близкого зелёного человека. Теперь заметим, что среди любых пяти подряд стоящих человек может быть не более двух зелёных человек. Если их было бы три или больше, то у не крайних зелёных человек среди их близких было бы не меньше двух зелёных, что противоречит первому замечанию. Таким образом, разбивая стоящих по кругу человек на непересекающиеся пятерки, получаем, что всего может быть не более $\frac{20}{5} \cdot 2 = 8$ зелёных человек.

Пример расположения человек, на котором достигается полученная оценка:

З-З-К-К-К-З-З-К-К-К-З-З-К-К-К-З-З-К-К-К

9. (40 баллов) В вершинах правильного 100-угольника расположены целые числа, сумма которых равна 2025. Два игрока по очереди берут себе по одному числу.
- Первый игрок начинает, выбирая любое число.
 - Со второго хода разрешается брать числа только из вершин, соседних с теми, откуда уже были взяты числа.

После 100 ходов каждый игрок подсчитывает сумму своих чисел. Побеждает тот, у кого сумма больше.

Верно ли, что первый игрок всегда сможет выиграть, каким бы ни было начальное распределение чисел и как бы ни играл второй игрок?

Ответ: Да, верно.

Решение. Покрасим числа в вершинах 100-угольника в шахматном порядке; получится 50 черных и 50 белых чисел. Поскольку сумма всех чисел нечетная (равна 2025), то суммы только черных и только белых не могут быть одинаковыми, то есть какая-то из них больше. Пусть сумма белых чисел больше суммы черных чисел. Тогда первый игрок должен первым ходом выбрать какое-либо из белых чисел, вынуждая второго игрока выбирать только из черных. После хода второго игрока, выбравшего одно из черных, соседними с уже выбранными будут оставшееся черное и новое белое. Таким образом, первый игрок опять может выбрать белое число. Поступая так на протяжении всей игры, первый игрок возьмет себе все белые числа, а все черные достанутся второму игроку. Поскольку сумма белых больше, то победит первый игрок.

10. (40 баллов) *Саша должен был сложить несколько натуральных чисел и получить 2024. Однако Саша, по непонятным причинам, или извлёк из числа квадратный корень (если при этом получалось целое число), или возвёл число в квадрат, и только потом сложил. Могло ли у Саши получиться 2025?*

Ответ: Нет.

Решение. Идея решения состоит в том, что и при возведении в квадрат, и при извлечении корня (когда он извлекается) сохраняется четность. Так как если в разложении числа на простые сомножители было число 2, то при возведении в квадрат оно сохранится (и не может появиться, если его не было); если из числа можно извлечь квадратный корень, то каждый простой сомножитель в его разложение входит четное число раз, поэтому сохранится при операции извлечения корня (новые сомножители появиться также не могут).

Следовательно, четность суммы не меняется, если слагаемые, все или несколько, заменить на их квадраты или квадратные корни (когда получается целое число). Таким образом, получить вместо четной суммы нечетную невозможно.