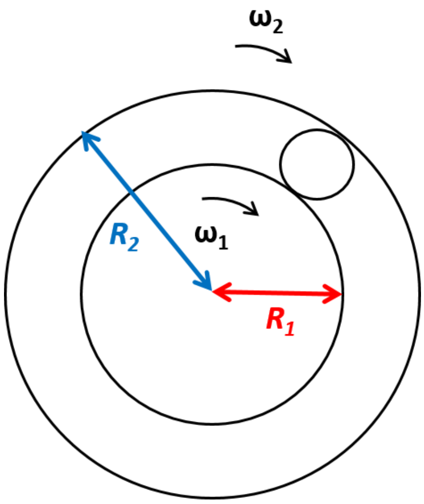
10 класс, задача 1, Вариант 1

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1, внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2 > \omega_1$ в том же направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо радиусом r так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца R_1:

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо R_1 покоится. Внешнее кольцо R_2 в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 - \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца R_2 будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 - \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в исходную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

$$v_0 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2} + \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2}$$

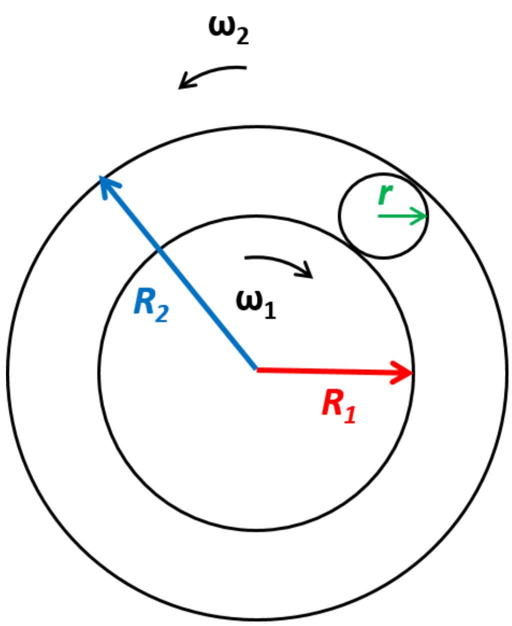
Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}$$

10 класс, задача 1, Вариант 2

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1, внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2<\omega_1$ в противоположном направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо ***r*** так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца ***R₁***:

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо ***R_1*** покоится. Внешнее кольцо ***R_2*** в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 + \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца ***R_2*** будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 + \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

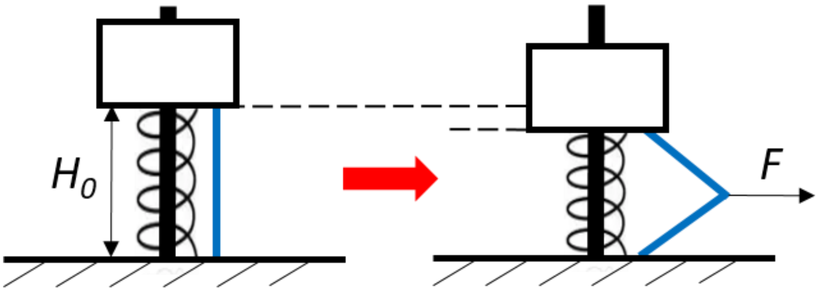
$$v_0 = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2} - \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2}$$

Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}$$

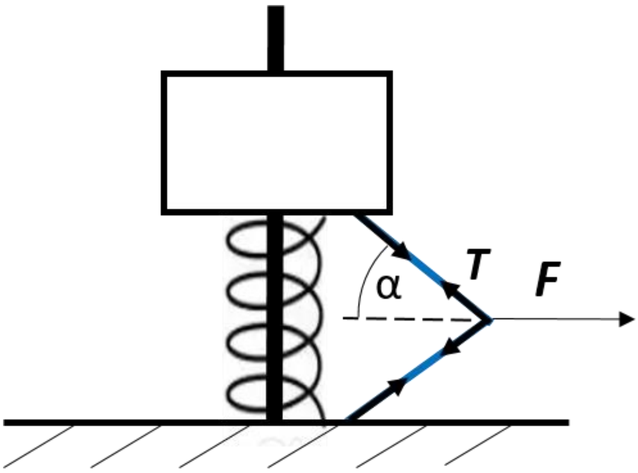
10 класс, задача 2

На рисунке изображена конструкция, состоящая из жесткой штанги, на которую насажены цилиндрическая массивная шайба и невесомая пружина жесткостью k_1. Шайба способна двигаться по штанге без трения. Пружина одним концом присоединена к шайбе, другим – к полу. Шайба соединена с полом еще и эластичным невесомым жгутом жесткостью k_2. Жгут изначально не растянут. Расстояние от пола до шайбы H_0. Жгут оттягивают за середину в горизонтальном направлении с некоторой силой F так, как показано на рисунке, в результате чего шайба опустилась. Определите величину этой силы, если известно, что длина жгута в результате натяжения увеличилась в **β** раз.



Решение

В результате натяжения жгута его длина увеличиться, а пружина сожмется. Обозначим силы натяжения на рисунке. Также угол между горизонталью и жгутом обозначим как **α**.



Сила натяжения связана с растяжением жгута. Обозначим это растяжение как Δl:

$$T = k_2 \Delta l \ (1)$$

По условию нам дано, что длина жгута увеличилась в **β** раз. С учетом того, что первоначальная длина была дана по условию, имеем:

$$\beta = \frac{H_0 + \Delta l}{H_0} => \Delta l = H_0(\beta - 1) \ (2)$$

$$T = k_2 H_0 (\beta - 1) \ (3)$$

Жгут тянет шайбу вниз, вертикальная проекция этой силы скомпенсирована дополнительным сжатием пружины:

$$k_1 \Delta H = T \sin\alpha = k_2 H_0 (\beta - 1) \sin\alpha \;\; (4)$$

Здесь ***ΔH*** – изменение высоты пружины после натяжения жгута. Синус угла **α** запишем по определению из прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является половина жгута, а противолежащим катетом – половина длины пружины:

$$\sin\alpha = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l} \cdot \frac{2}{2} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + H_0(\beta - 1)} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta} \;\; (5)$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}\right)^2} \;\; (6)$$

Подставим (5) в (4) и найдем ***ΔH***:

$$k_1 \Delta H = T \sin\alpha = k_2 H_0 (\beta - 1) \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}$$

$$k_1 \Delta H = k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) (H_0 - \Delta H)$$

$$k_1 \Delta H + \Delta H k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = H_0 k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Delta H = \frac{H_0 k_2 (\beta - 1)}{\big(\beta k_1 + k_2(\beta - 1)\big)} \;\; (7)$$

Сила натяжения жгута одинаковая по всей его длине. Силы, действующие на жгут в точке приложения силы ***F*** в проекции на горизонтальную плоскость:

$$F = 2T\cos\alpha$$

Подставляем все ранее найденные величины и получаем ответ:

$$F = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}\right)^2} = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)^2} \;\; =>$$

$$F = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{k_2(\beta - 1)}{\beta k_1 + k_2(\beta - 1)}\right)^2}$$

Ответ:

$$F = 2k_2 H_0 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}\right)^2}$$

10 класс, задача 3, вариант 1

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1 :

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$
$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{\text{пр}} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2}}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

$$U_{\text{пр}} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \frac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{2 + \frac{2}{5}}{2 + \frac{2}{5} + 1}\right) = \frac{12}{17}U_x$$

$$U_1 = U_2 = \frac{5}{17}U_x$$

Зная максимально возможные значения напряжения для каждого элемента цепи – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$ – найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи:

$$R_1\colon U_0 = \frac{5}{17}U_x \Rightarrow U_x = 3.4U_0$$

$$R_2\colon 3U_0 = \frac{5}{17}U_x \Rightarrow U_x = 10.2U_0$$

$$\text{прибор:}\, 5U_0 = \frac{12}{17}U_x \Rightarrow U_x = 7\frac{1}{12}U_0$$

Таким образом при значении напряжения на источнике $U_x = 3{,}4\ U_0$ перегорит резистор R_1. В этот момент схема примет следующий вид:

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = I_2$$

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_2$$

$$U_2 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}}R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}}R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

$$U_2 = U_x - \frac{U_x R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2} = U_x\left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}\right]$$

Напряжение на оставшемся резисторе R_2:

$$U_2 = U_x\left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}\right] = U_x\left[\frac{R_2}{R_{\text{пр}} + R_2}\right]$$

Напряжение на приборе:

$$U_{\text{пр}} = I_{\text{пр}}R_{\text{пр}} = I_{\text{общ}}R_{\text{пр}} = U_x\frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

Используя соотношения для сопротивлений, получим:

$U_2 = \frac{5}{7}U_x$ - напряжение на резисторе R_2.

$U_{\text{пр}} = \frac{2}{7}U_x$ - напряжение на электроприборе.

В момент, когда сгорел резистор R_1, на источнике было выставлено напряжение $3.4U_0$. Следовательно, напряжение на сопротивлении R_2 в этот момент будет

$$U_2' = \frac{5}{7} * 3.4U_0 = 2\frac{3}{7}U_0 < 3U_0$$

$$U_{\text{пр}}' = \frac{2}{7} * 3.4U_0 = \frac{34}{35}U_0 < 5U_0$$

Следовательно, оставшиеся элементы не перегорают сразу вслед за сопротивлением R_1, и напряжение можно повышать дальше.

Найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи в этом случае:

При $U_x = 4{,}2\,U_0$ – сопротивление R_2; $U_x = 17{,}5\,U_0$ – электроприбор.

Таким образом, сначала при напряжении $U_x = 3{,}4\,U_0$ сгорит резистор R1, но ток продолжит течь по цепи. Далее, при напряжении на источнике $U_x = 4{,}2\,U_0$ перегорит и второй резистор, что уже приведет к полному обрыву цепи.

Ответ: $U_x = 4{,}2\,U_0$

10 класс, задача 3, Вариант 2.

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $1.2U_0$, электроприбор при $3U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1 :

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$

$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{\text{пр}} = U_x \left(1 - \frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x \left(\frac{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2}}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

7Ò Ó L 7ë L (s/w E t/u) / (s/w E t/u E s) M L (s u / t z) 7ë

7 5 L 7 6 L (s w / t z) 7ë

¯ & A % ! - % # = & ((% (& < & 8 & A & * , A & A # A t ! (
, - / (R1 * , U0 U , - / R2 (, * , 1.2 U0 U > # ! / , (* , (, 3 U0 * , t & % & 8 & A
& * , A & A & - / (* 8 & ! (/ (, (% * , (, / ! < > # :% & / 6 *

4 5 ã 7 4 L (s w / t z) 7ë L P 7ë L s (s u / s w) 7 4

4 6 ã s ä t 7 4 L (s w / t z) 7ë L P 7ë L t (x / t w) 7 4

Ò Ó Ë Ä ã u Ñ Ó 7 4 L (s u / t z) 7ë L P 7ë L x (x / s u) 7 4

Ã ! % (, (% * , & 8 & & * , A (8 & ! A L & s (5 7 / 5 9) 7ë 7 4 * , (, / , - R1 (,
¦ > / (/ % (% & / - 5 % * , % / - : # 1 @ :

¦ > / % (- # 1 8 - * # , < - # 1 @ - ((& (9 & A :

+ Ñ Ä Ü L + Ò Ó L + 6

7ë L 7Ò Ó E 7 6

7 6 L 7ë F 7Ò Ó L 7ë F + Ò Ó 4 Ò Ó L 7ë F + Ñ Ä Ü 4 Ò Ó

+ Ñ Ä Ü L (7ë / 4 Ñ Ä Ü) L (7ë / (4 Ò Ó E 4 6))

$$7_6 \; L \; 7_ë \; F\frac{7_ë \, 4_{ÒÓ}}{4_{ÒÓ} E \, 4_6} \; L \; 7_ë \; H\$ \; F\frac{4_{ÒÓ}}{4_{ÒÓ} E \, 4_6} \; I$$

» * , A & & - / (9 % - A , - / (, R2:

$$7_6 \; L \; 7_ë \; H\$ \; F\frac{4_{ÒÓ}}{4_{ÒÓ} E \, 4_6} \; I \; L \; 7_ë \; H\frac{4_6}{4_{ÒÓ} E \, 4_6} \; I$$

» * , A & & * , : (,

$$7_{ÒÓ} L + 4_{ÒÓ} L + 4_{ÒÓ} L \; 7_ë \frac{4_{ÒÓ}}{4_{ÒÓ} E \, 4_6}$$

Á (* , (/ # & / (, ((R2 t 0.3R, * , (, t 0.2R. ° - * (# = 1 A - ((/ & 9 (& A # A - (* , (/ # & U (# 1 8 %

$7_6 \; L \frac{7}{9} 7_ë$ - & * , A & & , - / (, R2.

$7_{ÒÓ} L \frac{6}{9} 7_ë$ - & * , A & & ! > / , # (* , (, X

¦ % (% & 1 (U - (, # , - / (, R1, & - / (8 & ! < # (< - / # & (& * , A & $s\frac{57}{59} 7_4$.

Á # (/ # = & (U & * , A & & - (* , R2 (/ > # / (& % % (& / 1 /

$$7^{ñ}_6 \; L \frac{s}{w} Û \frac{tz}{w} 7_4 \; L \; s\frac{u}{tw} 7_4 \; O \; sä 1 \, 7_4$$

$$7^{ñ}_{ÒÓ} L \frac{t}{w} Û \frac{tz}{sw} 7_4 \; L \frac{wx}{yw} 7_4 \; O \; u 7_4$$

Á # (/ # = & ((U - / 9 - A > # % & < / & * , (, @ / - , 1 - # - (* , (/ # & % R1, & * , A & % (& ((* < 9 / = # 9 = X

» % & 8 & A & * , A & A & - / (8 & , ! * , ! (/ (, (% 6 , (, / ! < > # % & / 6 * > / % (- # 1 : 8

¿ , $7_ë \; L \; t \, 7_4$ t - (* , (/ # & R2 ; $7_ë \; L \; yáw \, 7_4$ t > # ! / , (* , (, X

Ã ! % (, (% - U & 8 # * , & * , A & $s\frac{57}{59} 7_4$ - (, / , - / (R1 U & (/ (! * , ((# / / 8 = * (6 * X ª U # * , & * , A & & 7 / (8 & ! * , (, / (, (, - / , (U 8 / (1 * , / ! * (# % & 1 ((, < 1 6 * X

½ / / : $7_ë \; L \; t \, 7_4$

10 класс, задача 4

Для изготовки термометра в тонкий стеклянный капилляр высотой *H* и сечением *S* налили ртуть общей массой M_0, предварительно откачав из него весь воздух, герметично закрыли и нанесли линейную шкалу на основе данных о термическом расширении ртути. Определите, какую температуру покажет градусник, если внести его в среду с температурой T_c? Зависимость плотности ртути от температуры дается формулой:

$$\rho_ж(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

где T_0 – температура замерзания ртути. Зависимость плотности насыщенных паров ртути от температуры, а также все величины и коэффициенты, перечисленные выше, считайте известными. Столбик ртути не достигает конца капилляра. Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

Решение:

В градусник наливают M_0 ртути под вакуумом. Часть ртути испаряется. Ртуть в градуснике находится как в жидком, так и в газообразном состоянии. Общее число частиц жидкости в сосуде не меняется:

$$N = N_ж + N_п$$

Обозначим m_0 массу одной частицы. Масса всего вещества в сосуде:

$$M = m_0(N_ж + N_п) = M_ж + M_п$$

Обозначим за h высоту столба ртути. Тогда масса пара:

$$M_п = \rho_п S(H - h)$$

Получаем:

$$M = S\big(\rho_ж h + \rho_п(H - h)\big) => \frac{M}{S} = \rho_ж h + \rho_п(H - h)$$

Градусник проградуировали, полагая термическое расширение ртути, пренебрегая испарением:

$$\rho_ж(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

$$M_0 = \rho_ж(T)Sh = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}Sh => 1 + \beta(T - T_0) = \frac{\rho_0 Sh}{M}$$

Получаем выражение для шкалы:

$$\beta\Delta T = \frac{\rho_0 S}{M}\Delta h => \Delta T = \frac{\rho_0 S}{\beta M}\Delta h$$

Градусник внесли в среду с температурой T_c:

$$\frac{M_0}{S} = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T_c - T_0)} h + \rho_п(T_c)(H - h)$$

Выражаем высоту столбика ртути при этой температуре:

$$\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H = h\left(\frac{\rho_0}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)\right)$$

$$h = \frac{\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)}$$

При этом на градуснике отметка в $\boldsymbol{T_c}$ будет стоять на высоте:

$$h' = \frac{M_0\big(1 + \beta(T_c - T_0)\big)}{\rho_0 S} > h$$

Отличие в показаниях составит:

$$\Delta T = \frac{h' - h}{\Delta h} = \left(\frac{M_0\big(1 + \beta(T_c - T_0)\big)}{\rho_0 S} - \frac{\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)}\right)\frac{\rho_0 S}{\beta M_0}$$

$$\left(1 + \beta(T_c - T_0) - \frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

И искомая температура будет:

$$T_x = T_c - \Delta T = T_c - \left(1 + \beta(T_c - T_0) - \frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

$$T_x = T_0 + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\left(\frac{1}{1 + \beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}\right)} - 1\right)$$

10 класс, задача 5, вариант 1

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рисунке слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы №3 и №4 сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рисунке справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

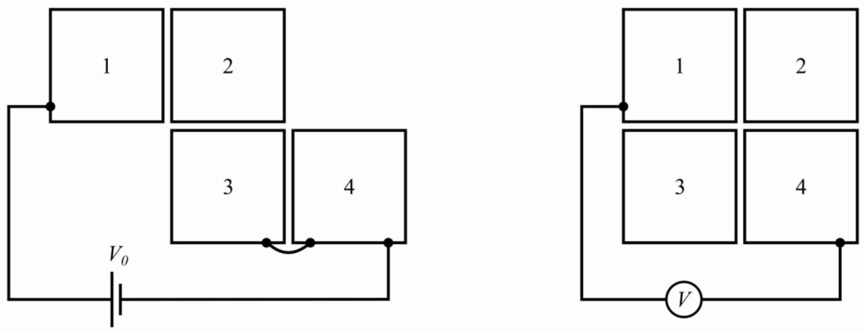


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Решение

Два расположенных рядом металлических куба образуют плоский конденсатор. Так как зазор между кубами много меньше их линейных размеров, краевыми эффектами можно пренебречь. Можно составить схему замещения всей системы:

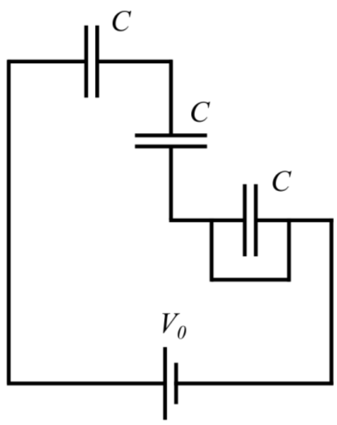


Рис.2 Схема замещения исходной системы

Обозначим за q заряд, до которого заряжается конденсатор C из двух кубов, если к ним приложить напряжение V_0. При последовательном соединении конденсаторов, как на рис.2, ёмкость уменьшается: $C_\Sigma = \frac{1}{2}C$ (последняя ёмкость зашунтирована перемычкой, и её можно исключить из схемы). Т.к. напряжение на системе равно V_0, то суммарная ёмкость заряжается до $\frac{1}{2}q$. При последовательном соединении изменение заряда на конденсаторах одинаково, поэтому каждая из емкостей тоже заряжена до $\frac{1}{2}q$. Каждый из заряженных конденсаторов электронейтрален, на одной из обкладок скапливается заряд $+\frac{1}{2}q$, а на другой $-\frac{1}{2}q$. На рис.3 подписаны заряды, которые скопились на поверхностях соответствующих граней.

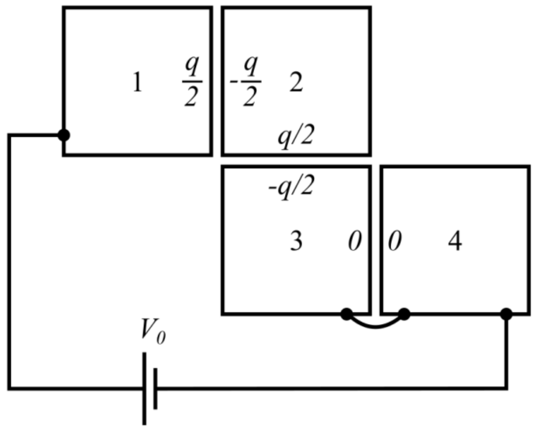


Рис.3 Исходная система с подписанными зарядами граней кубов.

Заметим, что у куба №1 оказывается суммарный заряд $+\frac{1}{2}q$, а у куба №3 заряд $-\frac{1}{2}q$. Кубы №2 и №4 электронейтральны. Когда был отключён источник напряжения и была убрана перемычка, все кубы оказались изолированными, и их заряды в дальнейшем не должны меняться.

После перемещения кубов образовалась цепочка из четырёх конденсаторов (рис.4), и заряды граней q_{ik} определённым образом изменились.

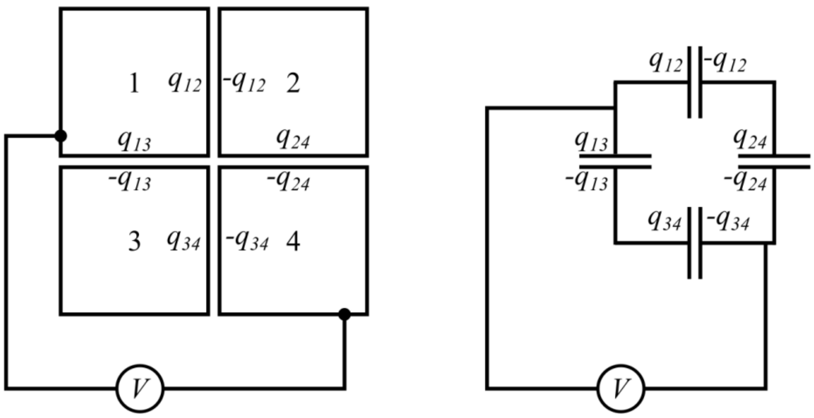


Рис.4 Система после изменения с подписанными зарядами граней кубов (слева) и схема замещения (справа).

Сохранение суммарного заряда кубов можно теперь записать в виде уравнений:

$$q_{12} + q_{13} = \frac{1}{2}q$$

$$-q_{12} + q_{24} = 0$$

$$-q_{13} + q_{34} = -\frac{1}{2}q$$

$$-q_{24} - q_{34} = 0$$

При этом последнее уравнение получается из трёх предыдущих, если их сложить. Поэтому, на самом деле, пока что записаны 3 независимых уравнения на 4 неизвестных. Необходимо записать ещё одно уравнение, чтобы найти неизвестные.

Достаточно рассмотреть схему на рис.3 как параллельное соединение двух цепочек, каждая из которых состоят из двух последовательно соединённых конденсаторов. Напряжение при параллельном соединение одинаково, а при последовательном - складывается, поэтому:

$$V_{12} + V_{24} = V_{13} + V_{34}$$

Где $V_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$ - разность потенциалов между *i*-м и *k*-м кубом, $V_{ik} = -V_{ki}$.

Так как ёмкости всех конденсаторов равны между собой, то можно перейти к аналогичному уравнению на величины зарядов:

$$q_{12} + q_{24} = q_{13} + q_{34}$$

Теперь решим эту систему. Перенесём q_{24} в последнем уравнении в правую часть и выразим остальные величины через q_{12}, используя другие уравнения. Получим уравнение на q_{12}:

$$q_{12} = q_{13} + q_{34} - q_{24} = \left(\frac{1}{2}q - q_{12}\right) - q_{12} - q_{12}$$

Откуда

$$q_{12} = \frac{1}{8}q$$

Из уравнений 1-3 далее находятся и другие значения:

$$q_{24} = \frac{1}{8}q$$

$$q_{13} = \frac{3}{8}q$$

$$q_{34} = -\frac{1}{8}q$$

Теперь, зная заряды конденсаторов, образующихся между гранями кубов, можно найти разность потенциалов между кубами №1 и №4:

$$V = V_{12} + V_{24} = \frac{q_{12}}{C} + \frac{q_{24}}{C} = \frac{1}{4}\frac{q}{C} = \frac{1}{4}V_0$$

Ответ: $V = \frac{1}{4}V_0$

10 класс, задача 5, вариант 2

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

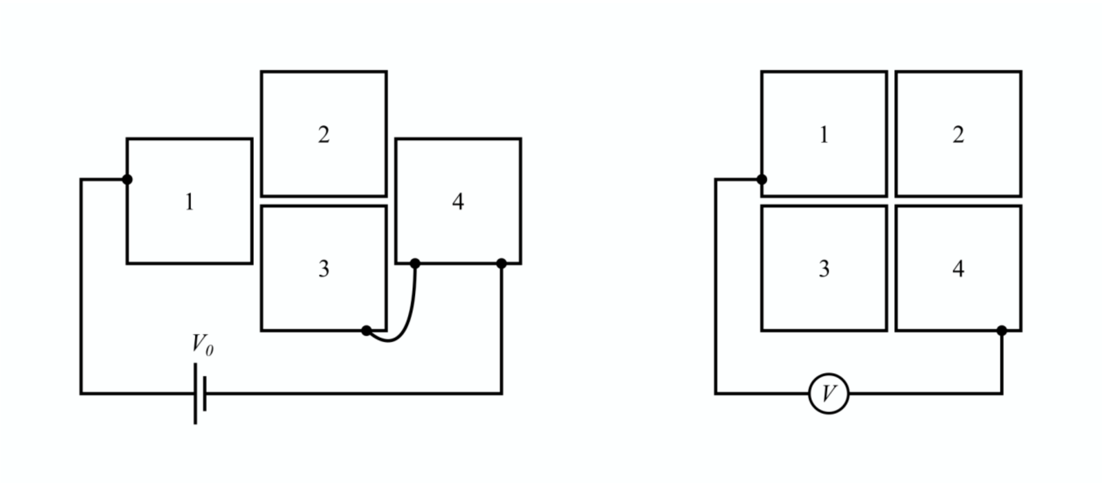


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{1}{2}V_0$

10 класс, задача 5, 11 класс, задача 2, вариант 3

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №2 и №3 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему начали менять. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №2 и №3, затем кубы №3 и №4 поменяли местами и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

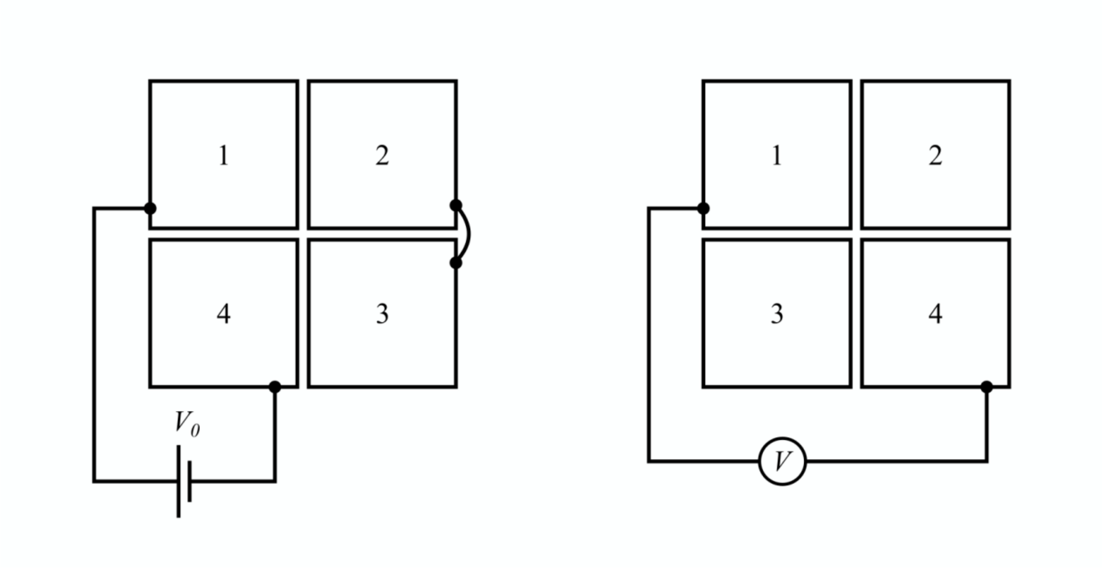


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{3}{2}V_0$