11 класс, задача 1

Для изготовки термометра в тонкий стеклянный капилляр высотой *H* и сечением *S* налили ртуть общей массой $\boldsymbol{M_0}$, предварительно откачав из него весь воздух, герметично закрыли и нанесли линейную шкалу на основе данных о термическом расширении ртути. Определите, какую температуру покажет градусник, если внести его в среду с температурой $\boldsymbol{T_c}$? Зависимость плотности ртути от температуры дается формулой:

$$\rho_{ж}(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

где T_0 – температура замерзания ртути. Зависимость плотности насыщенных паров ртути от температуры, а также все величины и коэффициенты, перечисленные выше, считайте известными. Столбик ртути не достигает конца капилляра. Влиянием поверхностного натяжения пренебречь.

Решение:

В градусник наливают $\boldsymbol{M_0}$ ртути под вакуумом. Часть ртути испаряется. Ртуть в градуснике находится как в жидком, так и в газообразном состоянии. Общее число частиц жидкости в сосуде не меняется:

$$N = N_{ж} + N_{п}$$

Обозначим m_0 массу одной частицы. Масса всего вещества в сосуде:

$$M = m_0(N_{ж} + N_{п}) = M_{ж} + M_{п}$$

Обозначим за h высоту столба ртути. Тогда масса пара:

$$M_{п} = \rho_{п} S(H - h)$$

Получаем:

$$M = S\big(\rho_{ж} h + \rho_{п}(H - h)\big) => \frac{M}{S} = \rho_{ж} h + \rho_{п}(H - h)$$

Градусник проградуировали, полагая термическое расширение ртути, пренебрегая испарением:

$$\rho_{ж}(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)}$$

$$M_0 = \rho_{ж}(T) Sh = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} Sh => 1 + \beta(T - T_0) = \frac{\rho_0 Sh}{M}$$

Получаем выражение для шкалы:

$$\beta \Delta T = \frac{\rho_0 S}{M} \Delta h => \Delta T = \frac{\rho_0 S}{\beta M} \Delta h$$

Градусник внесли в среду с температурой $\boldsymbol{T_c}$:

$$\frac{M_0}{S} = \frac{\rho_0}{1+\beta(T_c - T_0)} h + \rho_п(T_c)(H-h)$$

Выражаем высоту столбика ртути при этой температуре:

$$\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H = h\left(\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)\right)$$

$$h = \frac{\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)}$$

При этом на градуснике отметка в $\boldsymbol{T_c}$ будет стоять на высоте:

$$h' = \frac{M_0\big(1+\beta(T_c - T_0)\big)}{\rho_0 S} > h$$

Отличие в показаниях составит:

$$\Delta T = \frac{h' - h}{\Delta h} = \left(\frac{M_0\big(1+\beta(T_c - T_0)\big)}{\rho_0 S} - \frac{\frac{M_0}{S} - \rho_п(T_c)H}{\frac{\rho_0}{1+\beta(T_c - T_0)} - \rho_п(T_c)}\right)\frac{\rho_0 S}{\beta M_0}$$

$$\left(1+\beta(T_c - T_0) - \frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1+\beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

И искомая температура будет:

$$T_x = T_c - \Delta T = T_c - \left(1+\beta(T_c - T_0) - \frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\frac{1}{1+\beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}}\right)\frac{1}{\beta}$$

$$T_x = T_0 + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1 - \frac{S\rho_п(T_c)H}{M_0}}{\left(\frac{1}{1+\beta(T_c - T_0)} - \frac{\rho_п(T_c)}{\rho_0}\right)} - 1\right)$$

11 класс, задача 2, вариант 1

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рисунке слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы №3 и №4 сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рисунке справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

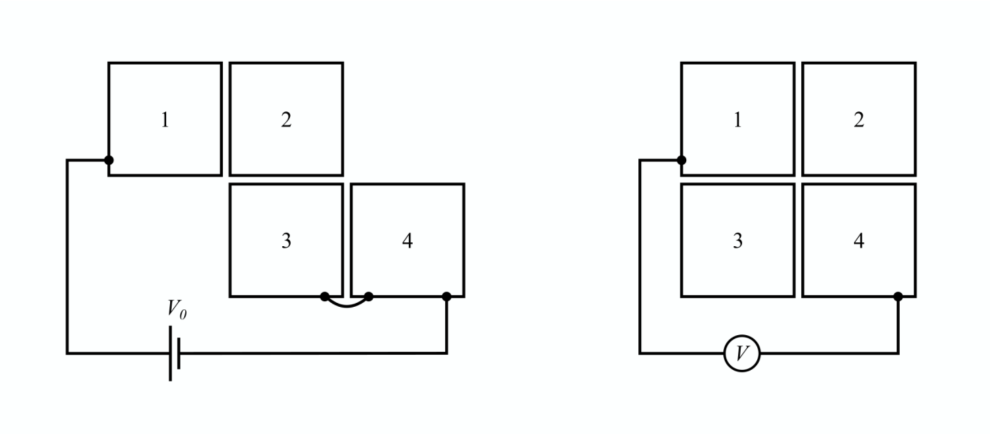


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Решение

Два расположенных рядом металлических куба образуют плоский конденсатор. Так как зазор между кубами много меньше их линейных размеров, краевыми эффектами можно пренебречь. Можно составить схему замещения всей системы:

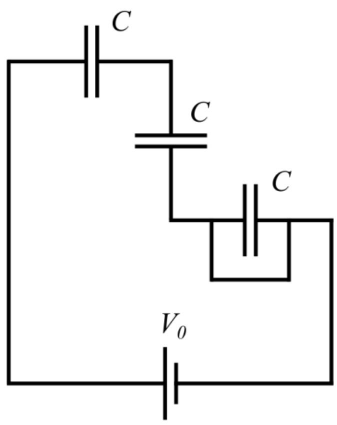


Рис.2 Схема замещения исходной системы

Обозначим за q заряд, до которого заряжается конденсатор C из двух кубов, если к ним приложить напряжение V_0. При последовательном соединении конденсаторов, как на рис.2, ёмкость уменьшается: $C_{\Sigma} = \frac{1}{2} C$ (последняя ёмкость зашунтирована перемычкой, и её можно исключить из схемы). Т.к. напряжение на системе равно V_0, то суммарная ёмкость заряжается до $\frac{1}{2}q$. При последовательном соединении изменение заряда на конденсаторах одинаково, поэтому каждая из емкостей тоже заряжена до $\frac{1}{2}q$. Каждый из заряженных конденсаторов электронейтрален, на одной из обкладок скапливается заряд $+\frac{1}{2}q$, а на другой $-\frac{1}{2}q$. На рис.3 подписаны заряды, которые скопились на поверхностях соответствующих граней.

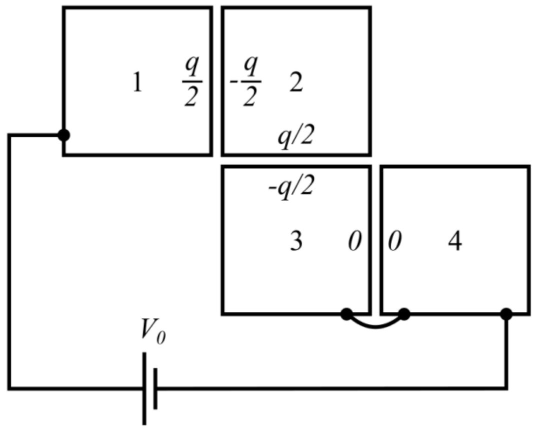


Рис.3 Исходная система с подписанными зарядами граней кубов.

Заметим, что у куба №1 оказывается суммарный заряд $+\frac{1}{2}q$, а у куба №3 заряд $-\frac{1}{2}q$. Кубы №2 и №4 электронейтральны. Когда был отключён источник напряжения и была убрана перемычка, все кубы оказались изолированными, и их заряды в дальнейшем не должны меняться.

После перемещения кубов образовалась цепочка из четырёх конденсаторов (рис.4), и заряды граней q_{ik} определённым образом изменились.

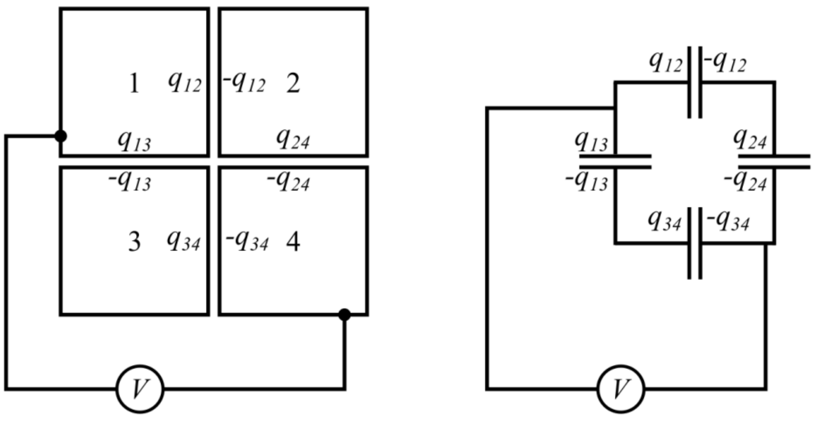


Рис.4 Система после изменения с подписанными зарядами граней кубов (слева) и схема замещения (справа).

Сохранение суммарного заряда кубов можно теперь записать в виде уравнений:

$$q_{12} + q_{13} = \frac{1}{2}q$$

$$-q_{12} + q_{24} = 0$$

$$-q_{13} + q_{34} = -\frac{1}{2}q$$

$$-q_{24} - q_{34} = 0$$

При этом последнее уравнение получается из трёх предыдущих, если их сложить. Поэтому, на самом деле, пока что записаны 3 независимых уравнения на 4 неизвестных. Необходимо записать ещё одно уравнение, чтобы найти неизвестные.

Достаточно рассмотреть схему на рис.3 как параллельное соединение двух цепочек, каждая из которых состоят из двух последовательно соединённых конденсаторов. Напряжение при параллельном соединение одинаково, а при последовательном - складывается, поэтому:

$$V_{12} + V_{24} = V_{13} + V_{34}$$

Где $V_{ik} = \varphi_i - \varphi_k$ - разность потенциалов между *i*-м и *k*-м кубом, $V_{ik} = -V_{ki}$.

Так как ёмкости всех конденсаторов равны между собой, то можно перейти к аналогичному уравнению на величины зарядов:

$$q_{12} + q_{24} = q_{13} + q_{34}$$

Теперь решим эту систему. Перенесём q_{24} в последнем уравнении в правую часть и выразим остальные величины через q_{12}, используя другие уравнения. Получим уравнение на q_{12}:

$$q_{12} = q_{13} + q_{34} - q_{24} = \left(\frac{1}{2}q - q_{12}\right) - q_{12} - q_{12}$$

Откуда

$$q_{12} = \frac{1}{8}q$$

Из уравнений 1-3 далее находятся и другие значения:

$$q_{24} = \frac{1}{8}q$$

$$q_{13} = \frac{3}{8}q$$

$$q_{34} = -\frac{1}{8}q$$

Теперь, зная заряды конденсаторов, образующихся между гранями кубов, можно найти разность потенциалов между кубами №1 и №4:

$$V = V_{12} + V_{24} = \frac{q_{12}}{C} + \frac{q_{24}}{C} = \frac{1}{4}\frac{q}{C} = \frac{1}{4}V_0$$

Ответ: $V = \frac{1}{4}V_0$

11 класс, задача 2, вариант 2

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №3 и №4 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему изменили. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №3 и №4, затем кубы сдвинули и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

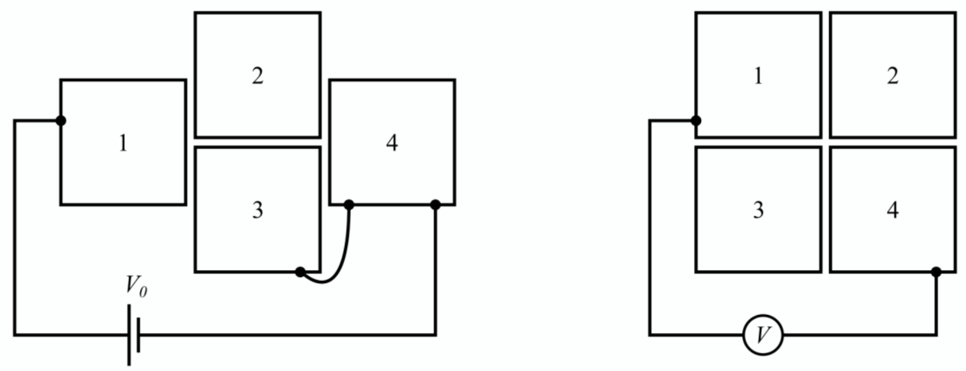


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{1}{2}V_0$

11 класс, задача 2, вариант 3

На столе находились четыре незаряженных металлических куба. Их выложили в фигуру, показанную на рис. 1 слева, соединили кубы №2 и №3 проводящей перемычкой и подключили источник напряжения V_0 между кубами №1 и №4. После этого схему начали менять. Сначала отсоединили источник напряжения, потом убрали перемычку между кубами №2 и №3, затем кубы №3 и №4 поменяли местами и, наконец, к кубам №1 и №4 подключили вольтметр. Итоговое состояние системы показано на рис. 1 справа. Какое напряжение покажет вольтметр? Считайте, что зазор между кубами всегда один и тот же, и что он много меньше стороны куба.

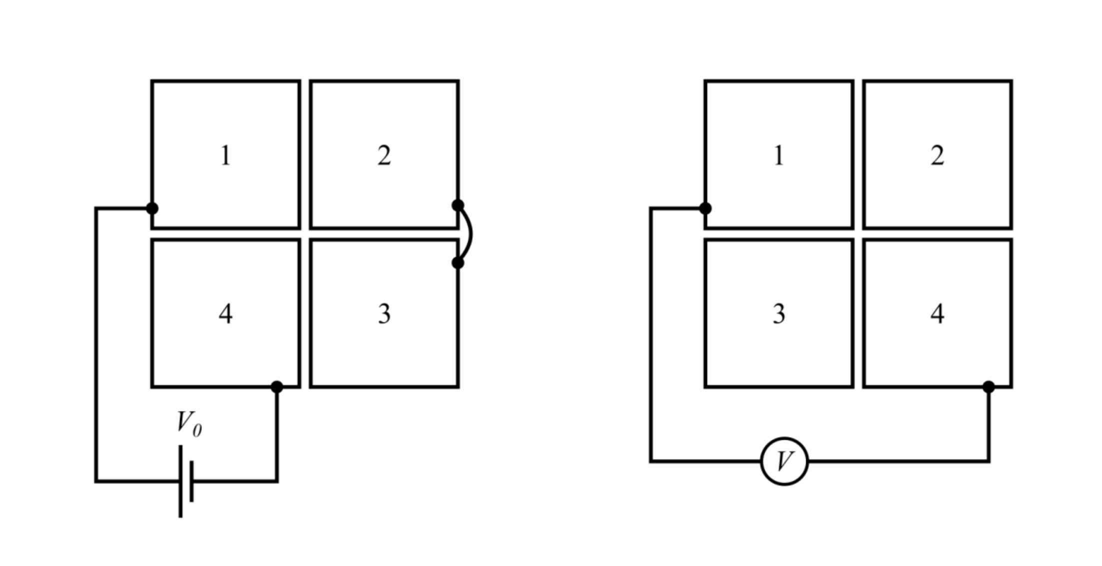


Рис.1 Исходная конфигурация системы (слева) и изменённая (справа).

Ответ: $V = \frac{3}{2}V_0$

11 класс, задача 3, Вариант 1

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент колесо поставили на поверхность, и оно начало двигаться вдоль нее. Спустя время ***t*** колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени ***t***. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой же оси. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.

Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает двигаться с ускорением, при этом проскальзывая. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v_{\text{п}}$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Отсюда:

$$x(t) = x_0 + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v_{п}(t) = \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu mgR$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

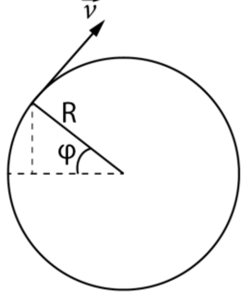
$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени t, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} t R = \mu g t$$

$$t = \frac{\omega_0 R}{3\mu g}$$

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.



Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega(t)R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + Rsin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + Rsin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли из условия, когда вертикальная составляющая скорости становится равна нули:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < t$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

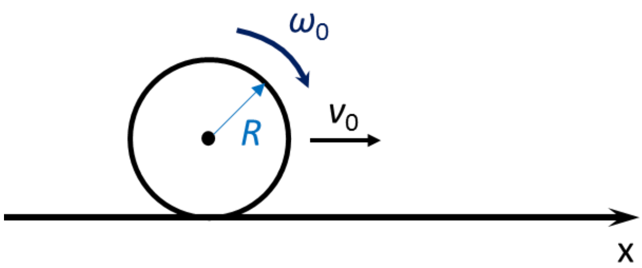
Если $t > t$, то вместо t ставим ранее полученное выражение для него:

$$y_{max} = R + \frac{9g}{2{\omega_0}^2} + \frac{(\omega_0 R)^2}{18g}$$

11 класс, задача 3, Вариант 2

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент колесо поставили на поверхность, сообщив ему начальную скорость $v_0 < \omega_0 R$ в горизонтальном направлении так, как показано на рисунке. Спустя время ***t*** колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени ***t***. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – суммарный момент внешних сил относительно этой же оси. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.



Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает двигаться с ускорением, проскальзывая. поскольку $\omega R > v_0$. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Сила трения будет препятствовать вращению, поэтому будет сонаправлена начальной скорости. Отсюда:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v(t) = v_0 + \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu m g R$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени t, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} t R = v_0 + \mu g t$$

$$t = \frac{\omega_0 R - v_0}{3\mu g}$$

В этот момент времени:

$$v(\tilde{t}) = v_0 + \frac{\omega_0 R - v_0}{3} = \frac{2}{3} v_0 + \omega_0 R$$

Колесо продолжит двигаться дальше равномерно с такой скоростью.

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.

Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + R sin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + R sin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < t$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

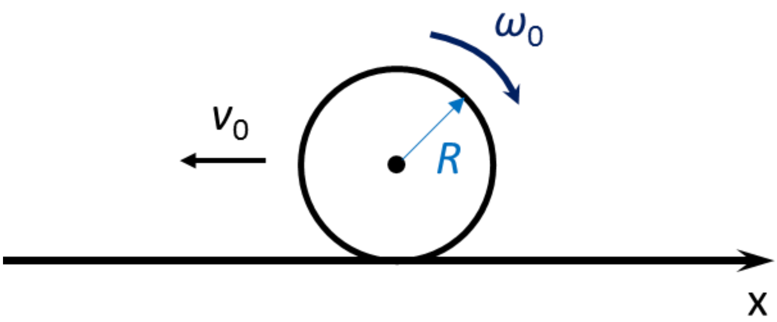
Если $t > t$:

$$y_{max} = R + \frac{gR^2}{2\left(\frac{\omega_0 R}{3} + \frac{2v_0}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_0 R}{3} + \frac{2v_0}{3}\right)^2}{2g}$$

11 класс, задача 3, Вариант 3

Мокрое колесо радиусом R, вращающееся с частотой ω_0, держат навесу. В некоторый момент времени $\boldsymbol{t_0}$=0 колесо поставили на поверхность, сообщив ему начальную скорость $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2}$ в горизонтальном направлении так, как показано на рисунке. Спустя время $\boldsymbol{t}$ колесо продолжало движение, вращаясь так, что с каждой точки его поверхности срывались капли с начальной скоростью, равной скорости этой точки. Определите, чему равна максимальная высота, которой достигли капли, оторвавшиеся от поверхности колеса в момент времени $\boldsymbol{t}$. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность – μ. Трением качения пренебрегите.

Примечание: Угловое ускорение $\vec{\beta}$ связано с моментом приложенных сил соотношением: $I\vec{\beta} = \vec{M}$, где I – момент инерции тела относительно оси вращения, $\vec{M}$ – момент внешних сил. Для круглого колеса, вращающегося вокруг своей оси $I = \frac{mR^2}{2}$.



Решение

Когда колесо поставили на горизонтальную поверхность, оно начинает проскальзывать, двигаясь с ускорением, поскольку $\omega R > -v_0$. Для поступательного движения ускорение положительное, для вращения- отрицательное. Когда будет выполняться соотношение $\omega R = v$, колесо начнет двигаться без проскальзывания и, соответственно, равномерно без ускорения.

1. Поступательное движение:

$$x(t) = x_0 + \frac{at^2}{2}$$

Ускорение колеса:

$$ma = \mu mg$$

$$a = \mu g$$

Трение будет препятствовать вращению колеса, ускорение будет направлено в сторону, противоположную направлению начальной скорости. Отсюда:

$$x(t) = x_0 - v_0 t + \frac{\mu g t^2}{2}$$

Тогда скорость движения при наличии проскальзывания:

$$v(t) = -v_0 + \mu g t$$

2. Вращательное движение:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t$$

Пользуемся примечанием из условия, расписывая момент силы:

$$I\beta = M, I = \frac{mR^2}{2}, M = -\mu m g R$$

Отсюда:

$$\beta = -\frac{2\mu g}{R}$$

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R} t$$

3. Определяем момент времени t, когда движене с проскальзыванием переходит в движение без проскальзывания ($\omega R = v$):

$$\omega_0 R - \frac{2\mu g}{R} t R = -v_0 + \mu g t$$

$$t = \frac{\omega_0 R + v_0}{3\mu g}$$

Скорость колеса в этот момент времени:

$$v(\tilde{t}) = -\tilde{v}_0 + \frac{\omega_0 R + v_0}{3} = \frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2}{3} v_0$$

По условию сказано, что $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2}$, следовательно колесо не поменяет направление движения.

4. Полет капель. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром колеса.

Капли вылетают по касательной со скоростью $\omega R = \omega_0 R - 2\mu g t$, под некоторым углом φ. Начальная высота капли:

$$y_0(\varphi) = R + Rsin(\varphi)$$

Высота и скорость капли, вылетевшей в момент времени t, по мере полета на протяжении времени t':

$$y(\varphi, t', t) = R + Rsin(\varphi) + (\omega_0 R - 2\mu g t)\cos(\varphi)\, t' - \frac{g t'^2}{2}$$

$$v_y(\varphi, t', t) = (\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi) - g t'$$

Находим время подъема капли:

$$\widetilde{t'} = \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t) cos(\varphi)}{g}$$

Тогда максимальная высота в зависимости от угла φ и момента времени вылета t:

$$y_{max}(\varphi, t) = R + Rsin(\varphi) + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2 \cos(\varphi)^2}{2g}$$

5. Находим угол, под которым вылетает капля, достигающая наибольшей высоты среди всех капель, вылетающих в момент времени t:

$$\frac{\partial y_{max}(\varphi, t)}{\partial \varphi} = 0$$

Получаем:

$$\sin(\varphi) = \frac{gR}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}$$

$$\cos(\varphi)^2 = 1 - \frac{(gR)^2}{(\omega_0 R - 2\mu g t)^4}$$

6. Максимальная высота подъема капель в произвольный момент времени $t < \tilde{t}$:

$$y_{max}(t) = R + \frac{gR^2}{2(\omega_0 R - 2\mu g t)^2} + \frac{(\omega_0 R - 2\mu g t)^2}{2g}$$

Если $t > \tilde{t}$:

$$y_{max} = R + \frac{gR^2}{2\left(\frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2v_0}{3}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\omega_0 R}{3} - \frac{2v_0}{3}\right)^2}{2g}$$

11 класс, задача 4, Вариант 1:

Высокий теплоизолированный герметичный цилиндрический сосуд с площадью основания ***S***, закрытый сверху невесомым поршнем, способным двигаться без трения, находится в поле тяжести планеты с атмосферой, состоящей из аргона (молярная масса $\boldsymbol{M_{Ar}}$). Температура атмосферы и ускорение свободного падения с высотой меняются незначительно. Внутри сосуда находится $\boldsymbol{\nu}$ моль аргона при той же температуре, что и снаружи.

1) Определите, на какой высоте находится поршень.
2) Газ в сосуде начинают медленно остужать. Определите, до какой температуры остудили газ, если поршень опустился до высоты ***H.***

Атмосферное давление на поверхности планеты, ускорение свободного падения и температуру атмосферы считайте известными.

Решение:

Вопрос 1): Зависимость концентрации атомов от высоты дается распределением Больцмана (или барометрической формулой):

$$n(y) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT}\right)$$

По условию нам дано, что в сосуде находится известное количество аргона, т. е. известно, сколько всего частиц находится в сосуде. Соотнесем это число с распределением концентраций атомов по высоте. Так, выделим некоторый слой газа внутри сосуда толщиной dy. Число частиц в этом слое будет:

$$dN(y) = n_0 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT}\right) S dy$$

Отсюда, взяв интеграл вплоть до высоты, на которой находится поршень, получаем выражение:

$$N = Sn_0 \cdot \frac{RT}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right)\right)$$

Откуда выражаем высоту H_0:

$$\frac{\nu Mg}{Sn_0kT} = 1 - \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right) => \exp\left(-\frac{MgH_0}{RT}\right) = 1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT} => -\frac{MgH_0}{RT} = \ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT}\right) =>$$

$$H_0 = -\frac{RT}{Mg}\ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{Sn_0kT}\right)$$

По условию нам дано, что давление аргона у поверхности равно P_0. Поскольку поршень находится в покое, то давления на него снаружи и изнутри равны. А так как внутри и снаружи сосуда находится один и тот же газ при той же температуре, а толщина поршня незначительная, то давление аргона у основания сосуда внутри него равно тому же P_0. Отсюда получаем окончательное выражение для высоты, на которой находится поршень:

$$H_0 = -\frac{RT}{Mg}\ln\left(1 - \frac{\nu Mg}{SP_0}\right)$$

Вопрос 2) Далее, газ в сосуде начинает остывать, в то время как снаружи температура не меняется. Давление внутри сосуда будет уменьшаться, поршень будет опускаться. Будет выполняться равенство давлений на поршень снаружи (выражение слева) и изнутри (выражение справа):

$$P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT}\right) = P_1 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)$$

Давление внутри сосуда у его основания P_1 теперь будет отличаться от P_0. Чтобы его определить, вновь запишем выражение для полного числа частиц в сосуде, которое остается постоянным:

$$N = Sn_1 \cdot \frac{RT_1}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)\right) => \nu = Sn_1 \cdot \frac{kT_1}{Mg}\left(1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)\right) =>$$

$$n_1 = \frac{\nu Mg}{SkT_1} \cdot \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}$$

$$P_1 = n_1 kT_1$$

H – конечное положение поршня. Необходимо найти $T_1(H)$.

Имеем:

$$P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = n_1 kT_1 \exp\left(-\frac{Mgy}{RT_1}\right) => P_0 \exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = \frac{\nu MgkT_1}{SkT_1} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}$$

$$\exp\left(-\frac{MgH}{RT_0}\right) = \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right)} => 1 - \exp\left(-\frac{Mgy}{RT_1}\right)$$

$$= \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \exp\left(-\frac{MgH}{RT_1}\right) \exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right)$$

$$\exp\left(\frac{MgH}{RT_1}\right) - 1 = \frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot \exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) => \frac{MgH}{RT_1} = \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) + 1\right)$$

Получаем ответ:

$$T_1(H) = \frac{MgH}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{MgH}{RT_0}\right) + 1\right)}$$

Если бы не было зависимости от высоты, т.е. когда $Mgy \ll RT_0$:

$$T_1(y) = \frac{Mgy}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} \cdot exp\left(\frac{Mgy}{RT_0}\right) + 1\right)} \approx \frac{Mgy}{R \cdot \ln\left(\frac{\nu Mg}{SP_0} + 1\right)} \approx \frac{Mgy}{R \cdot \frac{\nu Mg}{SP_0}} = \frac{ySP_0}{R\nu} = \frac{P_0 V}{\nu R}$$

11 класс, задача 4, Вариант 2

В пробирке, закрытой пробкой массы ***m***, находится ***ν*** моль аргона при температуре ***T*** (молярная масса ***M***** M_{Ar}). Пробирка закреплена в центрифуге радиуса ***R***, вращающейся с круговой частотой $\boldsymbol{\omega_0}$, дном к ее центру. Определите силу трения покоя, действующую на пробку. Площадь поперечного сечения пробирки ***S***, высота ***H***, расстояние от дна пробирки до центра центрифуги ***R***, причем ***R>>H.*** Внутри центрифуги вакуум. Силой тяжести пренебречь.

Решение

Решение удобно проводить в неинерциальной системе отсчета, связанной с центрифугой. В этой системе отсчета при вращении центрифуги на пробку будут действовать центробежная сила, сила трения и сила давления газа внутри пробирки. Чтобы пробка начала вылетать, должно выполниться следующее соотношение:

$$m\omega_0^2 R + p_{Ar}S = F,$$

Давление аргона на пробку:

$$p_{Ar} = n_0 kT,$$

n_0 – концентрация атомов вблизи пробки. Распределение атомов внутри пробирки будет подчиняться распределению Больцмана:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g_{eff} r}{kT}\right),$$

где $m_0 g_{eff} r$ – потенциальная энергия атома, находящегося в пробирке на расстоянии r от пробки.

Атом, находясь в пробирке, будет находится в потенциальном поле центробежной силы. Поскольку высота пробирки много меньше радиуса центрифуги, вариацией центробежной силы с координатой внутри пробирки можно пренебречь. Тогда потенциальная энергия атома в этом поле, отсчитываемая от пробки, будет определяться как:

$$U = \int_0^r m_0\omega_0^2 R dr = m_0\omega_0^2 r R$$

Где $m_0 = M_{Ar}/N_A$ – масса атома аргона (N_A – постоянная Авогадро).

Само распределение тогда:

$$n(r) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 r R}{kT}\right)$$

По условию дано количество вещества аргона в пробирке, т. е. общее количество атомов N. Его можно записать как:

$$N = S\int_0^H n(r)dr = S\int_0^H n_0 \exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 rR}{kT}\right)dr = Sn_0\frac{kT}{m_0\omega_0^2 R}\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)$$

Откуда можно выразить концентрацию частиц у пробки n_0:

$$n_0 = \frac{Nm_0\omega_0^2 R}{SkT\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

Тогда давление газа на пробку будет равно:

$$p_{Ar} = n_0 kT = \frac{\nu M_{Ar}\omega_0^2 R}{S\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

И искомая сила трения:

$$F = m\omega_0^2 R + p_{Ar}S = m\omega_0^2 R + \frac{\nu M_{Ar}\omega_0^2 R}{\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}$$

$$= \omega_0^2 R\left(m + \frac{\nu M_{Ar}}{\left(1-\exp\left(-\frac{m_0\omega_0^2 HR}{kT}\right)\right)}\right)$$

11 класс, задача 5, Вариант 1:

Невесомая и нерастяжимая тонкая нить плотно виток к витку намотана на цилиндр радиуса **R** в **N** оборотов как показано на рисунке. К нижнему её концу привязан груз массой **m**. С какой силой надо тянуть свободный конец нити вверх, чтобы поднять груз, если коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра составляет **μ**? Цилиндр закреплён горизонтально и не вращается.

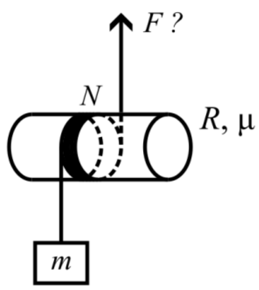


Рисунок 1. Иллюстрация нити, намотанной на цилиндр.

Решение:

Пусть $\boldsymbol{T}$ - натяжение нити. Когда она намотана на цилиндр и натянута, она прижимается к его поверхности с некоторой силой, зависящей от натяжения. Обозначим линейную плотность этой силы за $\boldsymbol{f(T)}$. Из-за этой силы, чтобы поднять груз, надо преодолеть не только силу тяжести, но и силу трения.

Допустим, что нить тянут с нужной силой, и груз поднимается с постоянной скоростью. Рассмотрим распределение сил в один из моментов времени.

Для небольшого участка нити ***dl*** сила трения составит $\boldsymbol{\mu f(T) dl}$. На такую величину увеличится натяжение нити на ***dl*** ближе к точке приложения силы. При этом величину ***dl*** можно выбрать сколь угодно малой, чтобы можно было считать, что $\boldsymbol{f(T)}$ постоянна на этом участке. Тогда можно записать уравнение:

$$\boldsymbol{T(l + dl) \ = \ T(l) + \mu f(T) dl}$$

Или

$$\frac{\boldsymbol{T(l + dl) \ - \ T(l)}}{\boldsymbol{dl}} = \boldsymbol{\mu f(T)}$$

Устремляя ***dl*** к нулю, можно перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{\boldsymbol{\partial T}}{\boldsymbol{\partial l}} = \boldsymbol{\mu f(T)}$$

Чтобы его решить, необходимо найти зависимость $\boldsymbol{f(T)}$

Рассмотрим, с какой силой небольшой участок нити ***dl*** прижимается к цилиндру, если считать, что на его масштабе сила натяжения не меняется. Для этого сделаем следующее построение (рисунок 2).

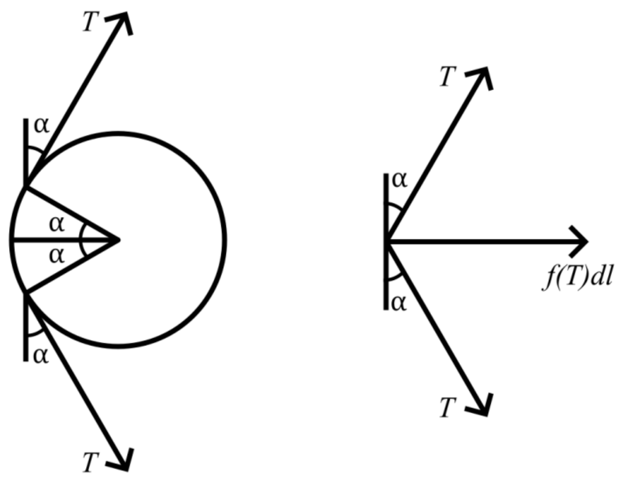


Рисунок 2. Иллюстрация возникновения силы, прижимающей нить к цилиндру

Сила $\boldsymbol{f(T)dl}$ - это результат векторного сложения сил натяжения нити, действующий на разные концы участка ***dl***. Из построения, используя угол $\boldsymbol{\alpha}$, её можно найти:

$$\boldsymbol{f(T)dl = 2T\sin(\alpha)}$$

Если учесть изменение натяжения нити, то сила будет:

$$\boldsymbol{f(T)dl = (2T + \mu f(T)dl)\sin(\alpha)}$$

Однако ввиду малости углов величина добавки будет второго порядка малости, которой можно пренебречь.

Так как ***dl*** можно выбирать сколь угодно малым, то и $\boldsymbol{\alpha}$ будет малой величиной, поэтому можно использовать свойство синуса для малого угла:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha) \approx \alpha}$$

Также $\boldsymbol{\alpha}$ можно выразить через длину дуги ***dl***, используя соотношение

$$\boldsymbol{dl} = 2\boldsymbol{\alpha R}$$

Подставляя эти соотношения и сокращая $\boldsymbol{dl}$, получаем

$$\boldsymbol{f(T)} = \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{R}}$$

Теперь можно записать дифференциальное уравнение в виде

$$\boldsymbol{\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\mu}{R}\, T}$$

Его решение

$$\boldsymbol{T(l) = T_0 \exp\left(\frac{\mu}{R} l\right)}$$

Где координату ***l*** вдоль нити можно отсчитывать от точки, где нить впервые касается цилиндра. В этой точке

$$\boldsymbol{T(0) = mg}$$

Откуда

$$\boldsymbol{T_0 = mg}$$

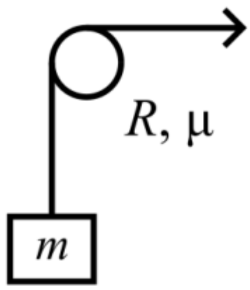
Длина ***N*** витков нити составляет $\boldsymbol{2\pi RN}$, откуда можно найти натяжение нити в конечной точке, которое равно силе, с которой необходимо тянуть:

$$\boldsymbol{F = T(2\pi RN) = mg\,\exp(2\pi\mu N)}$$

Ответ: $\boldsymbol{F = mg\,\exp(2\pi\mu N)}$

11 класс, задача 5, Вариант 2:

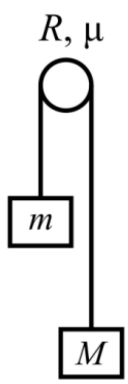
Строитель поднимает груз массой **m** за лёгкую нерастяжимую верёвку через неподвижный (не может вращаться вокруг своей оси) блок радиуса **R** (рисунок 1). Угол между частями верёвки составляет 90 градусов, а коэффициент трения нити о поверхность блока — **μ**. С какой минимальной силой строителю надо тянуть за верёвку, чтобы груз начал подниматься?



Ответ: $\boldsymbol{F = mg\,\exp(\pi\mu/2)}$

11 класс, задача 5, Вариант 3:

Два груза с массами **m** и **M** закреплены на концах лёгкой нерастяжимой верёвки, которая перекинута через бревно с круглым сечением с радиусам **R** (рисунок 1). При каком максимальном соотношении масс грузов **M/m** они останутся неподвижными, если коэффициент трения между верёвкой и бревном составляет **μ**? Бревно закреплено горизонтально и не вращается.



Ответ: $\boldsymbol{M/m = \exp(\pi\mu)}$