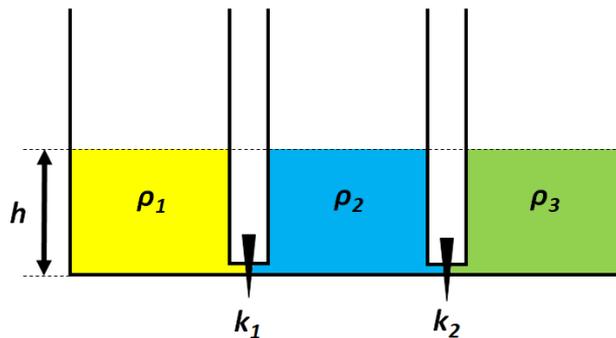


8 класс, задача 1, Вариант 1.

Три одинаковых сосуда соединены тонкими трубками, перекрытыми кранами k_1 и k_2 . В сосуды налиты жидкости с плотностями $\rho_1 > \rho_3 > \rho_2$. Начальная высота столбиков жидкости в сосудах одинакова и равна h . Сначала открывают кран k_2 , дожидаются, когда столбики жидкостей в сосудах придут в равновесие, после чего закрывают. Затем открывают кран k_1 , дожидаются равновесия, и закрывают. В результате в среднем сосуде образовался столбик из трех жидкостей, причем толщина нижнего слоя оказалась в $q = 10$ раз меньше начальной высоты h , а среднего – в $p = 9$ раз меньше h . Найдите отношение плотностей $\rho_1 : \rho_3$ и $\rho_3 : \rho_2$. Жидкости не смешиваются.



Решение.

Открываем кран k_2 . Поскольку по условию $\rho_3 > \rho_2$, жидкость из правого сосуда будет затекать в центральный. В равновесии в центральном сосуде будет два слоя жидкости: верхний слой — изначально находившаяся в сосуде жидкость 2 высотой h , нижний слой — жидкость 3 высотой h/p (по условию).

В правом сосуде останется столбик высотой $h(1 - 1/p)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и правом сосудах имеет вид

$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p = \rho_3 gh(1 - 1/p)$$

Отсюда

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{p}{p - 2} = \frac{9}{7}$$

Закрываем кран k_2 , открываем кран k_1 . По условию жидкость из левого сосуда затекает в центральный, и в равновесии в нем получается три слоя жидкости. Верхний слой - жидкость 2 высотой h , средний слой - жидкость 3 высотой h/p , нижний слой - жидкость 1 высотой h/q (по условию).

В левом сосуде останется столбик высотой $h(1 - 1/q)$.

Условие равновесия жидкости в центральном и левом сосудах имеет вид

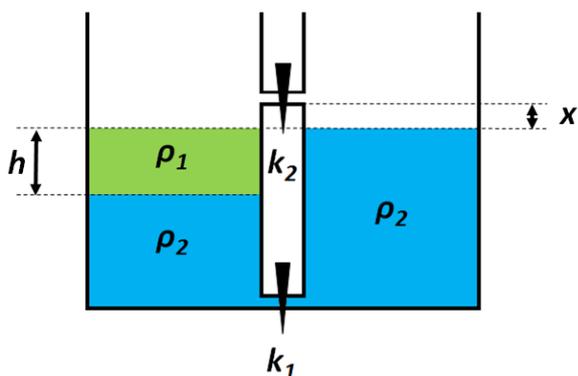
$$\rho_2 gh + \rho_3 gh/p + \rho_1 gh/q = \rho_1 gh(1 - 1/q)$$

Делим все на ρ_3 , находим ρ_1/ρ_3 :

$$\frac{\rho_1}{\rho_3} = \frac{q(p - 1)}{p(q - 2)} = \frac{10}{9}$$

Ответ: $\rho_1 : \rho_3 = 10:9$ и $\rho_3 : \rho_2 = 9:7$.

8 класс, задача 1, Вариант 2.



Экспериментальная установка, изображенная на рисунке, предназначена для измерения плотности масла. Она представляет собой два одинаковых сосуда, соединенных двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны (k_1 и k_2), изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся вода (плотность $\rho_2 = 1 \text{ г/мл}$) и масло с неизвестной плотностью ρ_1 , в правом только вода. Поверхности жидкостей в сосудах находятся на одном уровне, причем ниже верхней трубочки.

Студентам предлагалось определить плотность масла ρ_1 , выполнив следующие действия:

- 1) Измерить высоту столба масла h и расстояние x от поверхности жидкости в правом сосуде до верхней трубочки.
- 2) Открыть кран k_1 и дождаться равновесия.
- 3) Закрыть кран k_1 , открыть k_2 и дождаться равновесия.
- 4) Закрыть k_2 , вновь открыть k_1 , дождаться равновесия.
- 5) Измерить расстояние y от верхней трубочки до поверхности жидкости в правом сосуде.
- 6) По результатам измерений h , x и y вычислить плотность масла.

Один студент поленился делать эксперимент, измерил только $h = 15 \text{ см}$ и $x = 1 \text{ см}$ и пошел домой. Накануне сдачи отчета он «подогнал» y так, чтобы плотность масла получилась $\rho_1 = 0,8 \text{ г/мл}$. Какое значение y он взял?

Решение.

Поскольку плотность масла меньше плотности воды, а изначально поверхности жидкости на одной высоте, после того, как открыли k_1 , немного воды перетечет в левый сосуд:

$$h\rho_1 + (a + b)\rho_2 = (h + a - b)\rho_2$$

$$b = h \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = 3 \text{ см} > x$$

Когда закроют k_1 и откроют k_2 , столб масла высотой $b - x$ перетечет в правый сосуд. Давление жидкости в правом сосуде станет больше давления в левом. Поэтому, когда закроют k_2 и откроют k_1 , вода потечет из правого в левый сосуд.

$$(h - b + x)\rho_1 + (a + b + c)\rho_2 = (h + a - b - c)\rho_2 + (b - x)\rho_1$$

$$\text{Вот столько ее перетечет: } c = (b - x) \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

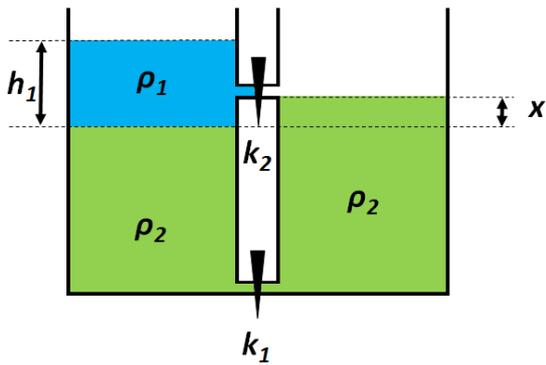
Высота столба жидкости в правом сосуде стала $h + a + b - x - c$, а изначально была $h +$

a . Значит,

$$y = x + h + a - (h + a + b - x - c) = 2x + c - b = \dots = x \left(2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + h \frac{\rho_1}{2\rho_2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

$$= 2,4 \text{ см}$$

8 класс, задача 1, Вариант 3.



Два одинаковых сосуда соединены двумя тонкими трубочками: у самого дна и посередине. В каждой трубочке установлены краны, изначально они закрыты. В левом сосуде находятся несмешивающиеся жидкости плотностью $\rho_2 > \rho_1$, в правом только жидкость плотностью ρ_2 . Поверхность жидкости плотностью ρ_2 в правом сосуде находится на уровне верхней трубочки, а в левом — на $x = 2$

см ниже. Высота столба жидкости ρ_1 равна $h_1 = 16$ см.

С установкой производят следующие манипуляции. Открывают кран K2, ждут равновесия, закрывают K2. Открывают кран K1, ждут равновесия, закрывают K1. И, снова, открывают кран K2 и ждут равновесия. В результате оказалось, что высота столба жидкости ρ_1 в левом сосуде в $q = 1,25$ раза больше, чем в правом. Найти отношение плотностей ρ_1/ρ_2 .

Решение.

Пусть h_2 — высота столба жидкости в правом сосуде.

Открыли K2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что поверхности жидкости в сосудах будут на одном уровне. Высота столба этой жидкости в левом сосуде будет $(h_1 + x)/2$, в правом $(h_1 - x)/2$.

Давление у дна в левом сосуде равно $p_1 = g\rho_2(h_2 - x) + g\rho_1(h_1 + x)/2$, в правом $p_2 = g\rho_2 h_2 + g\rho_1(h_1 - x)/2$. Поскольку $\rho_2 > \rho_1$, то $p_1 < p_2$.

Закрыли K2. Открыли K1. Жидкость будет перетекать из правого сосуда в левый, пока не установится равновесие:

$$\rho_2(h_2 - x + a) + \frac{\rho_1(h_1 + x)}{2} = \rho_2(h_2 - a) + \frac{\rho_1(h_1 - x)}{2}$$

Отсюда

$$a = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

В левом сосуде уровень жидкости ρ_1 выше верхней трубочки на $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{1}{2} \left(h_1 - x \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) > 0$, в правой $\frac{h_1 - x}{2} - a = \frac{h_1}{2} - \frac{x}{2} \left(2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) > 0$.

Закрыли K1, Открыли K2. Часть жидкости ρ_1 перетечет в правый сосуд, так что уровни жидкости в сосудах сравняются. Понятно, что слева уровень понизится, а справа повысится на a .

Высота столба жидкости ρ_1 слева равна $\frac{h_1 + x}{2} - a = \frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$, а справа $\frac{h_1 - x}{2} + a = \frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2}$.

Известно, что
$$\frac{h_1}{2} + \frac{x\rho_1}{2\rho_2} = q \left(\frac{h_1}{2} - \frac{x\rho_1}{2\rho_2} \right)$$

Отсюда
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_1(q - 1)}{x(q + 1)} = \frac{8}{9}$$

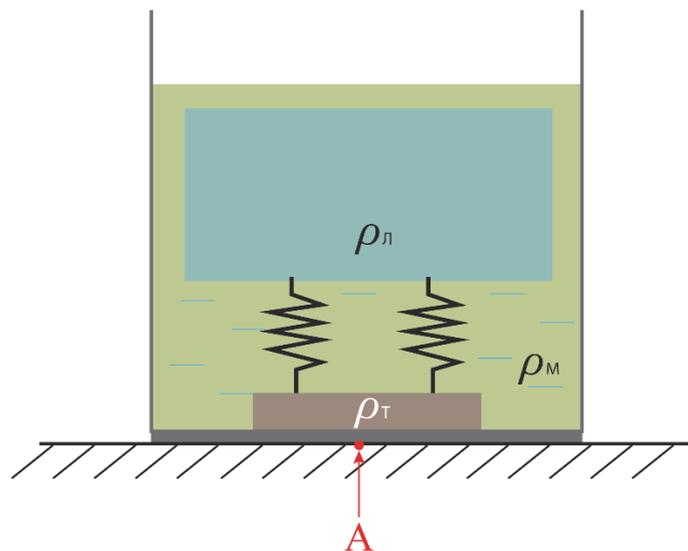
8 класс, задача 2, **Вариант 1.**

На дно пустого цилиндрического сосуда поместили конструкцию из легкого тела, скрепленного двумя невесомыми упругими пружинками с бруском водяного льда. Затем в сосуд наливают масло так, что оно полностью покрывает лед (см. рисунок) и может просачиваться между телом и дном сосуда. Плотности соотносятся между собой как $\rho_T < \rho_M < \rho_L$.

В начальный момент времени система находится при температуре 0° .

- 1) Найдите плотности ρ_T и ρ_M , если известны объемы тела $V_T = 0.0012 \text{ м}^3$, льда $V_L = 0.01 \text{ м}^3$ и масла $V_M = 0.02 \text{ м}^3$; плотность льда $\rho_L = 900 \text{ кг/м}^3$; отношение толщины слоя масла в начальном состоянии к толщине слоя масла после того, как лед полностью растаял $\frac{H}{H'} = 1.5$. Кроме того, известно, что в начальный момент времени тело давит на дно сосуда с силой $P = 5 \text{ Н}$.
- 2) Найдите, как изменится давление сосуда на стол в точке А после того, как лед полностью растает.

Считать, что в конечном состоянии все жидкости в системе разделяются на несмешивающиеся однородные слои.



Решение:

1) Из соотношения плотностей мы видим, что лед тонет в масле и прижимает легкое тело ко дну сосуда. Упругие пружинки не дают ледяному бруску полностью опуститься на тело, а телу – всплыть. Введем неизвестный коэффициент жесткости пружин k и изменение их длины Δx .

В начальный момент времени условие равновесия тела:

$$\rho_T V_T g + 2k\Delta x - \rho_M V_T g = N \quad (1)$$

где $N = P$ – сила реакции опоры, действующая на тело со стороны дна.

Условие равновесия бруска льда:

$$\rho_L V_L g - 2k\Delta x - \rho_M V_L g = 0 \quad (2)$$

После того, как лед полностью растает, вода опускается на дно (т.к. $\rho_M < \rho_L$ и, следовательно, $\rho_M < \rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$), а тело всплывает и плавает на поверхности масла.

$$\rho_T V_T g - \rho_M V_T' g = 0 \quad (3)$$

Где V_T' – объем масла, вытесненный телом.

$$V_T' = \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T \quad (4)$$

Теперь воспользуемся условием $\frac{H}{H'} = \alpha$. Обозначим площадь основания сосуда за S , тогда в начальный момент времени справедливо условие:

$$SH = V_M + V_T + V_L \quad (5)$$

А после таяния льда:

$$SH' = V_M + V_T' = V_M + \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T \quad (6)$$

Разделим (5) на (6):

$$\alpha = \frac{V_M + V_T + V_L}{V_M + \frac{\rho_T}{\rho_M} V_T}$$

Теперь выразим плотность тела:

$$\rho_T = \frac{V_M(1 - \alpha) + V_T + V_L}{\alpha V_T} \rho_M \quad (*)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$(\rho_T - \rho_M)V_T g + (\rho_L - \rho_M)V_L g = P$$

Подставим ρ_T , обозначив для краткости $\rho_T = \beta \rho_M$ (выражение (*)):

$$\begin{aligned} (\beta \rho_M - \rho_M)V_T g + (\rho_L - \rho_M)V_L g &= P \\ ((\beta - 1)V_T - V_L)g \rho_M &= P - \rho_L V_L g \end{aligned}$$

Выразим ρ_M :

$$\rho_M = \frac{P - \rho_L V_L g}{((\beta - 1)V_T - V_L)g} \quad (**)$$

Подставим численные значения:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{V_M(1 - \alpha) + V_T + V_L}{\alpha V_T} \approx 0.667 \\ \rho_M &= \frac{P - \rho_L V_L g}{((\beta - 1)V_T - V_L)g} \approx 817 \text{ кг/м}^3 \\ \rho_T &= 545 \text{ кг/м}^3 \end{aligned}$$

2) Давление в точке А равно весу сосуда Mg ($M = m_c + m_l + m_T + m_M$), деленному на площадь дна сосуда. Масса сосуда, масла, тела и воды/льда не меняется, поэтому и давление не меняется.

8 класс, задача 2, Вариант 2

В сосуд, заполненный маслом, опустили конструкцию из тела, скрепленного невесомой упругой пружинкой с бруском водяного льда объема $V_L = 5\,000 \text{ см}^3$. Масло полностью покрывает лед (см. рисунок) и может просачиваться между телом и дном сосуда.

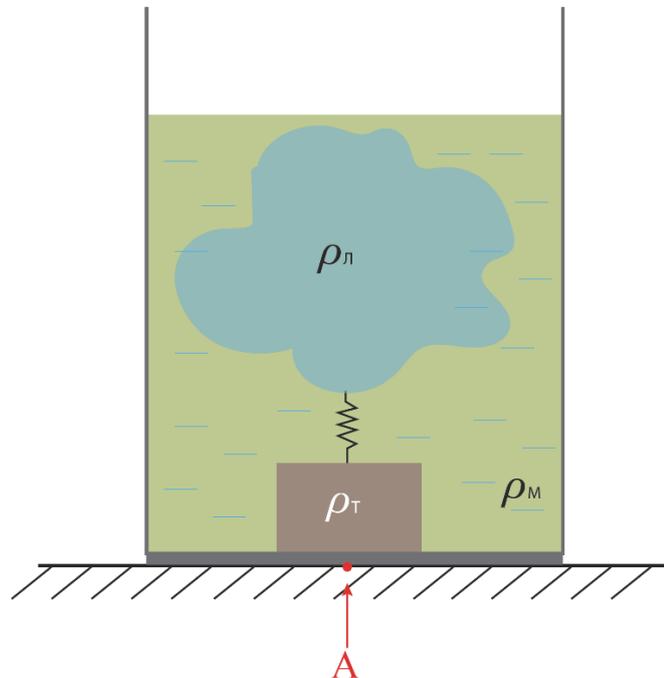
В начальный момент времени система находится при температуре 0° . Плотность льда $\rho_L = 900 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность масла $\rho_M = 920 \text{ кг/м}^3$.

- 1) Найдите, какой объем тела будет погружен в воду после того, как весь лед растает. Известно, что $\rho_M < \rho_T < \rho_B$, и что сила реакции опоры, действующая на тело в

начальный момент времени, $N = 0.5$ Н, а тело не выступает над поверхностью жидкости.

- 2) Найдите, как изменится давление сосуда на стол в точке А после того, как лед полностью растает.

Считать, что в конечном состоянии все жидкости в системе разделяются на несмешивающиеся однородные слои.



Решение:

1) Из соотношения плотностей мы видим, что тело тонет в масле и тянет за пружинку лед, не давая ему всплыть. Введем неизвестный коэффициент жесткости пружины k и изменение ее длины Δx .

В начальный момент времени условие равновесия тела:

$$\rho_T V_T g - k \Delta x - \rho_M V_T g = N \quad (1)$$

Условие равновесия бруска льда:

$$\rho_L V_{Лг} + k \Delta x - \rho_M V_{Лг} = 0 \quad (2)$$

После того, как лед полностью растает, вода опускается на дно ($\rho_M < \rho_B = 1000$ кг/м³), а тело всплывает в воде ($\rho_M < \rho_T < \rho_B$) и плавает на границе раздела воды и масла:

$$\rho_T V_T g - \rho_M V_T' g - \rho_B V_T'' g = 0 \quad (3)$$

Где V_T' – объем масла, вытесненный телом, а V_T'' – объем воды, вытесненный телом.

Справедливо соотношение

$$V_T' + V_T'' = V_T \quad (4)$$

$$\Rightarrow \rho_T V_T - \rho_B V_T'' - \rho_M (V_T - V_T'') = 0$$

Выразим объем тела, погруженный в воду:

$$V_T'' = \frac{(\rho_T - \rho_M) V_T}{(\rho_B - \rho_M)} \quad (*)$$

Сложим уравнения (1) и (2):

$$(\rho_T - \rho_M)V_T g + (\rho_L - \rho_M)V_L g = N \quad (**)$$

Уравнения (*) и (**) содержат три неизвестные величины ρ_T , V_T и V_T'' , но можно заметить, что из второго уравнения можно полностью выразить числитель правой части в (*), и таким образом решить его:

$$V_T'' = \frac{N + (\rho_M - \rho_L)V_L g}{(\rho_B - \rho_M)g}$$

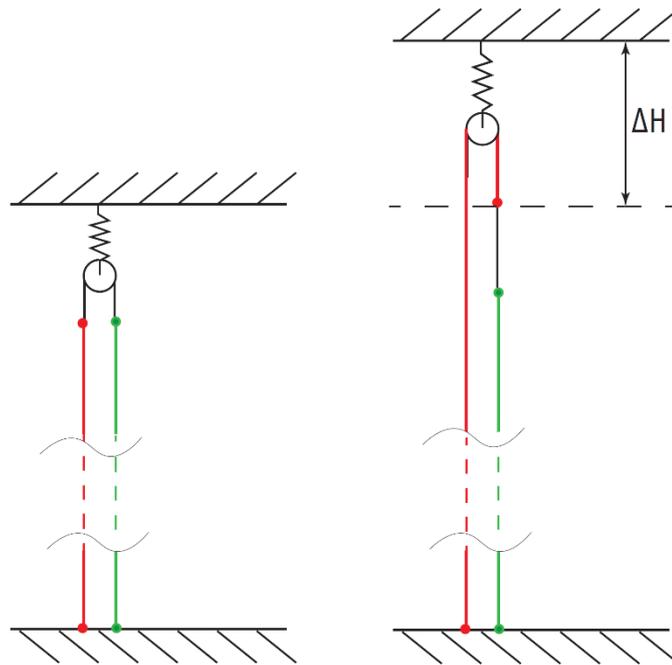
Подставим числа:

$$V_T'' = 0.00188 \text{ м}^3$$

2) Давление в точке А равно весу сосуда Mg ($M = m_c + m_l + m_T + m_M$), деленному на площадь дна сосуда. Масса сосуда, масла, тела и воды/льда не меняется, поэтому и давление не меняется.

8 класс, задача 3

Система состоит из массивного блока, подвешенного на пружине жесткостью k_1 , и двух невесомых упругих жгутов с жесткостями k_2 и k_3 ($k_2 < k_3$), связанных невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты перекинута через блок и может скользить по нему без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH . Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блока можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длин как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты).

По условию блок массивный, введем его массу M . Тогда в начальный момент времени на него действуют силы:

$$k_1 \Delta x_0 - Mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – удлинение пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия блока принимает вид:

$$k_1 (\Delta x_0 + \Delta x_1) - Mg - 2k_2 \Delta x_2 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1 \Delta x_1 - 2k_2 \Delta x_2 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения и равенством силы натяжения по всей длине (жгуты+нить):

$$k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH :

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{2} \quad (5)$$

Решая систему из трех уравнений (3)-(5), найдем искомые удлинения:

$$\Delta x_1 = \frac{4\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{2\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{2\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

8 класс, задача 4, Вариант 1

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.8 г. Температура пара в первом сосуде 94 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

Решение:

Для насыщенного пара при начальных условиях:

$$p_1 V = \frac{M}{\mu} R T_1,$$

где p_1 – давление насыщенного пара при T_1 , V – объем сосуда, M – масса пара в сосуде, R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса.

Давление насыщенного пара в первом сосуде найдем из данных в условии задачи температур и давления насыщенного водяного пара при 100 °С:

$$p_1 = p_{100} - \alpha * (100 - 94) = 101.3 - 2.4 * 6 = 86.9 \text{ кПа}$$

Тогда выражение для объема, занимаемого водяным паром:

$$V = \frac{M R T_1}{p_1 \mu}$$

Поскольку масса капли много меньше массы пара, то занимаемый ей объем также много меньше общего объема сосуда. Поэтому можно считать, что после испарения капли объем, занимаемый паром, не изменяется.

После нагрева:

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

$$p_2 = \alpha \Delta T + p_1$$

$$p_2 V = \frac{M + m}{\mu} R T_2$$

Здесь m – масса капли воды.

$$(\alpha \Delta T + p_1) V = \frac{M + m}{\mu} R (T_1 + \Delta T)$$

$$\Delta T = \frac{m T_1 p_1}{\alpha M T_1 - p_1 M - m p_1}$$

Количество теплоты, необходимое для нагрева и испарения капли воды, складывается из:

1. количества теплоты, необходимого для нагрева капли на ΔT ;
2. количества теплоты, необходимого для нагрева массы водяного пара на ΔT (пренебрегаем теплотой, ушедшей на нагрев пара от испаренной капли);
3. количества теплоты, необходимого для испарения капли воды.

Выражение для суммарного количества теплоты выглядит следующим образом:

$$Q = qm + ct\Delta T + c_{\text{пар}}M\Delta T$$

Тогда разница будет равна:

$$Q_2 - Q_1 = (ct + c_{\text{пар}}M)(\Delta T_2 - \Delta T_1) \approx 8.4 \text{ Дж}$$

8 класс, задача 4, Вариант 2

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.5 г. Температура пара в первом сосуде 96 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

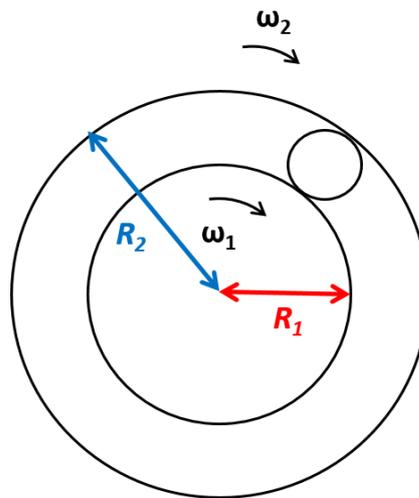
8 класс, задача 4, Вариант 3

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.7 г. Температура пара в первом сосуде 98 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

8 класс, задача 5, Вариант 1

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1 , внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2 > \omega_1$ в том же направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо радиусом r так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

- 1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2 ;
- 2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца R_1 :

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо R_1 покоится. Внешнее кольцо R_2 в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 - \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца R_2 будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 - \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v'_0 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в исходную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца r :

$$v_0 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2} + \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2}$$

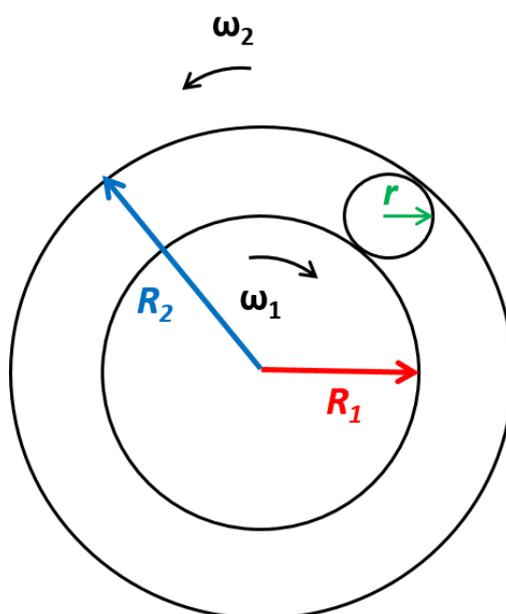
Тогда время, за которое малое кольцо r совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1} \right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}$$

8 класс, задача 5, Вариант 2

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1 , внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2 < \omega_1$ в противоположном направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо r так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

- 1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2 ;
- 2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца R_1 :

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо R_1 покоится. Внешнее кольцо R_2 в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 + \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца R_2 будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 + \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца r :

$$v_0 = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2} - \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2}$$

Тогда время, за которое малое кольцо r совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1} \right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}$$