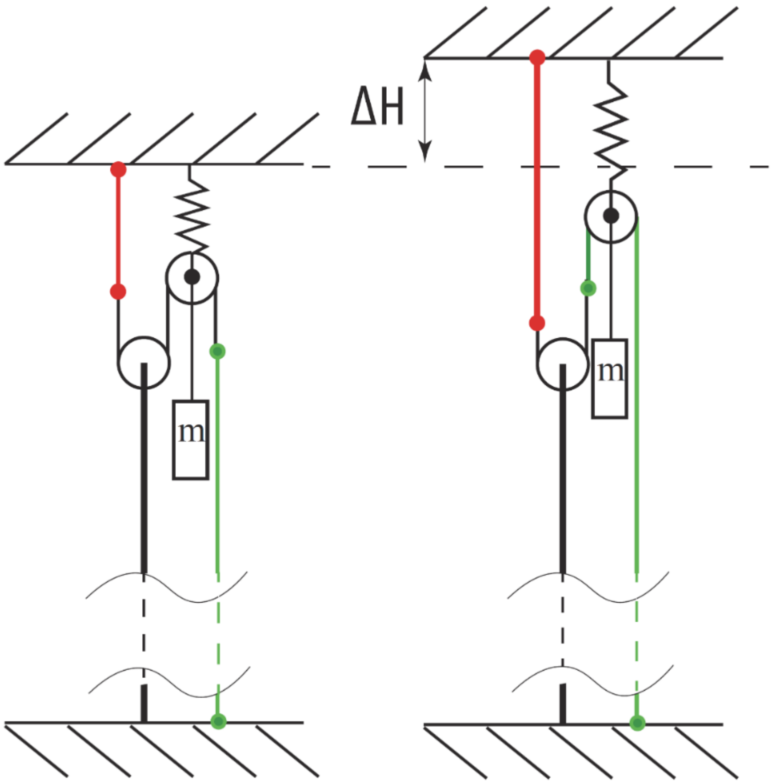
9 класс, задача 1, Вариант 1.

Система состоит из двух невесомых блоков: нижний закреплен на нерастяжимом стержне, а верхний – на пружине жесткостью k_1, к нему на невесомой нерастяжимой нити подвешен груз массой m. Через блоки перекинуты два невесомых упругих жгута с жесткостями k_2 и k_3 $(k_2 > k_3)$, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты может скользить по блокам без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH. Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блоков можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длины как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты). Запишем условие равновесия верхнего блока в начальный момент времени:

$$k_1 \Delta x_0 - mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – удлинение пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия верхнего блока принимает вид:

$$k_1(\Delta x_0 + \Delta x_1) - mg - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1\Delta x_1 - 2k_3\Delta x_3 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения между жгутом и блоком:

$$k_2\Delta x_2 = k_3\Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH. По условию задачи размерами блоков можно пренебречь. Тогда расстояние между полом и потолком складывается из длины стержня L_0, расстояния между блоками и длины пружины y:

$$H = x_0 + \Delta x_0 + L_0 + y \; (5)$$

После раздвижения:

$$H + \Delta H = x_0 + \Delta x_0 + \Delta x_1 + L_0 + y + \Delta y \; (6)$$

Вычитая (5) из (6), получаем:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \Delta y \; (7)$$

С другой стороны, длина системы нить+жгуты изначально:

$$L_x = L + 3y + x_0 + \Delta x_0 \; (8)$$

После раздвижения, с учетом растяжений жгутов Δx_2 и Δx_3 имеем:

$$L_x + \Delta x_2 + \Delta x_3 = L + 3y + 3\Delta y + x_0 + \Delta x_0 + \Delta x_1 \; (9)$$

Вычитая (8) из (9), получаем:

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = 3\Delta y + \Delta x_1 => \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} = \Delta y (10)$$

И для изменения расстояния имеем соотношение:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \quad (11)$$

Итого имеем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} k_1\Delta x_1 - 2k_3\Delta x_3 = 0 \\ k_2\Delta x_2 = k_3\Delta x_3 \\ \Delta H = \Delta x_1 + \dfrac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \end{cases}$$

Решая систему, найдем искомые удлинения:

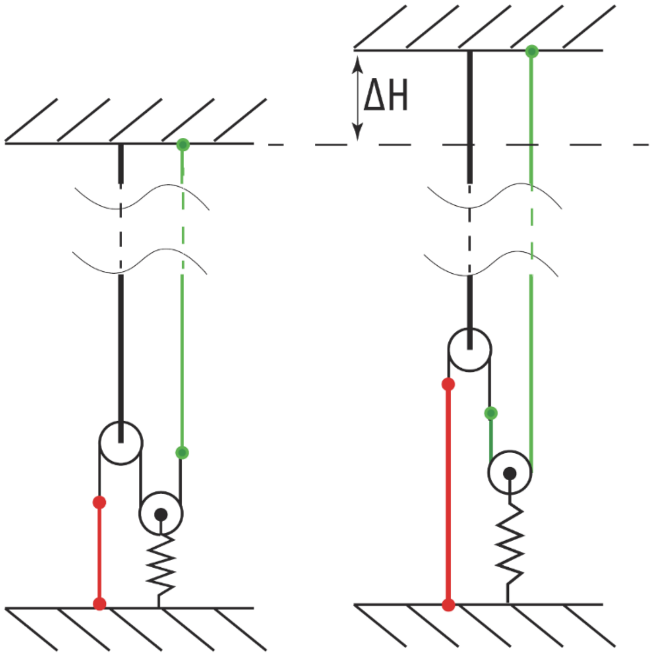
$$\Delta x_1 = \frac{6\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

9 класс, задача 1, Вариант 2.

Система состоит из двух массивных блоков: верхний закреплен на легком нерастяжимом стержне, а нижний – на невесомой пружине жесткостью k_1. Через блоки перекинуты два невесомых упругих жгута с жесткостями k_2 и k_3 ($k_2 > k_3$), связанные невесомой нерастяжимой нитью. Связка нить-жгуты может скользить по блокам без трения. Концы пружины и жгутов прочно прикреплены к двум параллельным горизонтальным плоскостям (см. Рисунок). В начальный момент времени жгуты не растянуты. Плоскости развели, увеличив расстояние между ними на ΔH. Найдите, на сколько удлинилась пружина и жгуты по сравнению с начальным состоянием. Геометрическими размерами блоков можно пренебречь.



Решение:

Обозначим изменения длины как Δx_1 (пружина) и Δx_2 и Δx_3 (жгуты).

По условию блоки массивные, введем их массу M. Тогда в начальный момент времени на нижний блок действуют силы:

$$k_1 \Delta x_0 - Mg = 0 \quad (1)$$

Где Δx_0 – деформация пружины в начальный момент времени.

После того, как плоскости развели, условие равновесия нижнего блока принимает вид:

$$k_1(-\Delta x_0 + \Delta x_1) + Mg - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (2)$$

Объединив (1) и (2), получаем:

$$k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \quad (3)$$

Воспользуемся условием отсутствия трения между жгутом и блоком:

$$k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \quad (4)$$

Теперь рассмотрим, как изменилось расстояние между плоскостями и воспользуемся условием, что изменение равно ΔH. По условию задачи размерами блоков можно пренебречь. Тогда расстояние между полом и потолком складывается из длины стержня L_0, расстояния между блоками и длины пружины y:

$$H = x_0 - \Delta x_0 + L_0 + y \ (5)$$

После раздвижения:

$$H + \Delta H = x_0 - \Delta x_0 + \Delta x_1 + L_0 + y + \Delta y \ (6)$$

Вычитая (5) из (6), получаем:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \Delta y \ (7)$$

С другой стороны, длина системы нить+жгуты изначально:

$$L_x = L + 3y + x_0 - \Delta x_0 \ (8)$$

После раздвижения, с учетом растяжений жгутов Δx_2 и Δx_3 имеем:

$$L_x + \Delta x_2 + \Delta x_3 = L + 3y + 3\Delta y + x_0 - \Delta x_0 + \Delta x_1 \ (9)$$

Вычитая (8) из (9), получаем:

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = 3\Delta y + \Delta x_1 => \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} = \Delta y (10)$$

И для изменения расстояния имеем соотношение:

$$\Delta H = \Delta x_1 + \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \quad (11)$$

Итого имеем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} k_1 \Delta x_1 - 2k_3 \Delta x_3 = 0 \\ k_2 \Delta x_2 = k_3 \Delta x_3 \\ \Delta H = \Delta x_1 + \dfrac{\Delta x_2 + \Delta x_3 - \Delta x_1}{3} \end{cases}$$

Решая которую, получаем:

$$\Delta x_1 = \frac{6\Delta H}{\left(4 + \frac{k_1}{k_3} + \frac{k_1}{k_2}\right)}$$

$$\Delta x_2 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_2}{k_1} + \frac{k_2}{k_3} + 1\right)}$$

$$\Delta x_3 = \frac{3\Delta H}{\left(4\frac{k_3}{k_1} + \frac{k_3}{k_2} + 1\right)}$$

9 класс, задача 2, Вариант 1

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.8 г. Температура пара в первом сосуде 94 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

Решение:

Для насыщенного пара при начальных условиях:

$$p_1 V = \frac{M}{\mu} R T_1,$$

где p_1 – давление насыщенного пара при T_1, V – объем сосуда, M – масса пара в сосуде, R – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса.

Давление насыщенного пара в первом сосуде найдем из данных в условии задачи температур и давления насыщенного водяного пара при 100 °С:

$$p_1 = p_{100} - \alpha * (100 - 94) = 101.3 - 2.4 * 6 = 86.9 \text{ кПа}$$

Тогда выражение для объема, занимаемого водяным паром:

$$V = \frac{MRT_1}{p_1 \mu}$$

Поскольку масса капли много меньше массы пара, то занимаемый ей объем также много меньше общего объема сосуда. Поэтому можно считать, что после испарения капли объем, занимаемый паром, не изменяется.

После нагрева:

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

$$p_2 = \alpha \Delta T + p_1$$

$$p_2 V = \frac{M + m}{\mu} R T_2$$

Здесь m – масса капли воды.

$$(\alpha \Delta T + p_1) V = \frac{M + m}{\mu} R (T_1 + \Delta T)$$

$$\Delta T = \frac{m T_1 p_1}{\alpha M T_1 - p_1 M - m p_1}$$

Количество теплоты, необходимое для нагрева и испарения капли воды, складывается из:

1. количества теплоты, необходимого для нагрева капли на ΔT;
2. количества теплоты, необходимого для нагрева массы водяного пара на ΔT (пренебрегаем теплотой, ушедшей на нагрев пара от испаренной капли);
3. количества теплоты, необходимого для испарения капли воды.

Выражение для суммарного количества теплоты выглядит следующим образом:

$$Q = qm + cm\Delta T + c_{\text{пар}} M\Delta T$$

Тогда разница будет равна:

$$Q_2 - Q_1 = \left(cm + c_{\text{пар}} M\right)(\Delta T_2 - \Delta T_1) \approx 8.4\ \text{Дж}$$

9 класс, задача 2, Вариант 2

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.5 г. Температура пара в первом сосуде 96 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

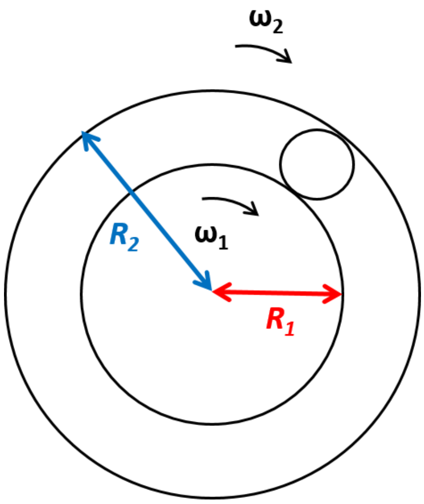
9 класс, задача 2, Вариант 3

Имеется два теплоизолированных сосуда, в каждом из которых содержится насыщенный водяной пар массой 0,1 кг и вода массой 0.7 г. Температура пара в первом сосуде 98 °С, во втором – 100 °С. Каждый из сосудов нагревают до тех пор, пока вода в нем не испарится полностью. Определите, на сколько количество теплоты, сообщенное в первый сосуд, отличалось от сообщенного во второй. Считайте, что удельная теплота парообразования не зависит от температуры, а давление насыщенного водяного пара возрастает на 2,4 кПа при повышении температуры на 1 К. Удельная теплоемкость водяного пара 1,38 кДж/кг·К. Давление насыщенного пара при 100 °С равно 101,3 кПа.

9 класс, задача 3, Вариант 1

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом $\boldsymbol{R_1}$ вращается вокруг своей оси с частотой $\boldsymbol{\omega_1}$, внешнее кольцо радиусом $\boldsymbol{R_2}$ – с частотой $\boldsymbol{\omega_2>\omega_1}$ в том же направлении. Между кольцами $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$ зажато малое кольцо радиусом $\boldsymbol{r}$ так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец $\boldsymbol{R_1}$ и $\boldsymbol{R_2}$;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца $\boldsymbol{R_1}$:

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо $\boldsymbol{R_1}$ покоится. Внешнее кольцо $\boldsymbol{R_2}$ в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 - \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца $\boldsymbol{R_2}$ будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 - \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в исходную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

$$v_0 = \frac{(\omega_2 - \omega_1)R_2}{2} + \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}{2}$$

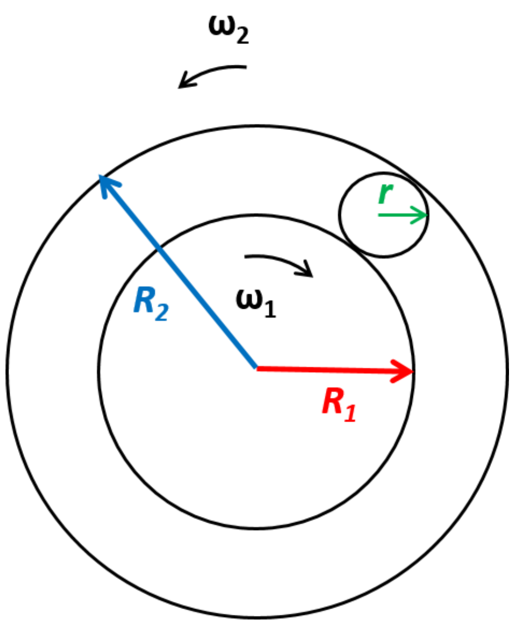
Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 + \omega_1 R_1}$$

9 класс, задача 3, Вариант 2

Система из трех колец закреплена так, как показано на рисунке. Внутреннее кольцо радиусом R_1 вращается вокруг своей оси с частотой ω_1, внешнее кольцо радиусом R_2 – с частотой $\omega_2 < \omega_1$ в противоположном направлении. Между кольцами R_1 и R_2 зажато малое кольцо ***r*** так, что при вращении колец оно движется без проскальзывания. Определите:

1) Время, за которое ось малого кольца совершит полный оборот вокруг оси колец R_1 и R_2;
2) Частоту обращения малого кольца вокруг своей оси в системе отсчета, в которой внутреннее кольцо неподвижно.



Решение:

Согласно условию радиус малого кольца, будет равен:

$$r = \frac{R_2 - R_1}{2}$$

Его центр расположен на расстоянии от оси кольца ***R₁***:

$$R_x = \frac{R_2 + R_1}{2}$$

Перейдем в систему отсчета, в котором внутреннее кольцо ***R_1*** покоится. Внешнее кольцо ***R_2*** в этой системе будет вращаться вокруг внутреннего с частотой $\omega' = \omega_2 + \omega_1$. В этой системе точка малого кольца, касающаяся кольца ***R_2*** будет двигаться с линейной скоростью

$$v' = (\omega_2 + \omega_1)R_2$$

Следовательно, центр малого кольца будет двигаться со скоростью, в два раза меньше:

$$v_0{}' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2}$$

Следовательно, частота обращения малого кольца вокруг своей оси в этой системе отсчета будет:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi r} v_0' = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2(R_2 - R_1)}$$

Возвращаясь в неподвижную систему отсчета, находим линейную скорость центра малого кольца ***r***:

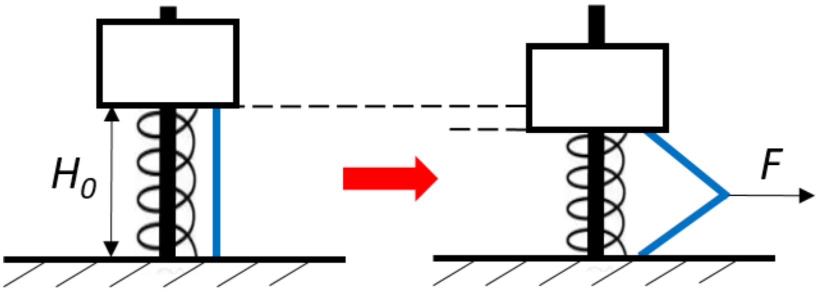
$$v_0 = \frac{(\omega_2 + \omega_1)R_2}{2} - \frac{\omega_1(R_2 + R_1)}{2} = \frac{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}{2}$$

Тогда время, за которое малое кольцо ***r*** совершит полный оборот вокруг внутреннего кольца:

$$t_1 = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{2} * \left(\frac{2}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}\right) = \frac{2\pi(R_1 + R_2)}{\omega_2 R_2 - \omega_1 R_1}$$

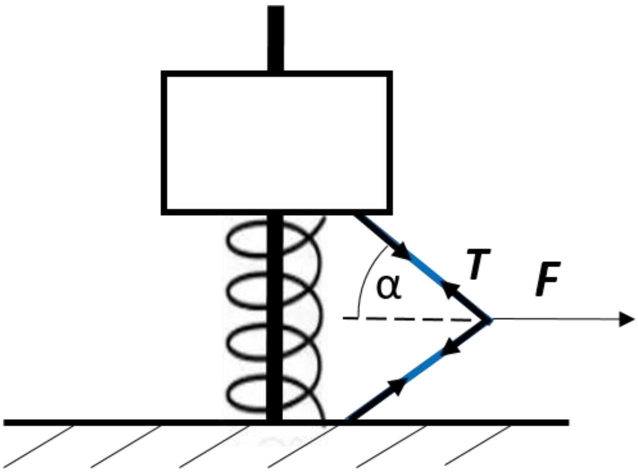
9 класс, задача 4

На рисунке изображена конструкция, состоящая из жесткой штанги, на которую насажены цилиндрическая массивная шайба и невесомая пружина жесткостью $\boldsymbol{k_1}$. Шайба способна двигаться по штанге без трения. Пружина одним концом присоединена к шайбе, другим – к полу. Шайба соединена с полом еще и эластичным невесомым жгутом жесткостью $\boldsymbol{k_2}$. Жгут изначально не растянут. Расстояние от пола до шайбы $\boldsymbol{H_0}$. Жгут оттягивают за середину в горизонтальном направлении с некоторой силой ***F*** так, как показано на рисунке, в результате чего шайба опустилась. Определите величину этой силы, если известно, что длина жгута в результате натяжения увеличилась в **β** раз.



Решение

В результате натяжения жгута его длина увеличиться, а пружина сожмется. Обозначим силы натяжения на рисунке. Также угол между горизонталью и жгутом обозначим как **α**.



Сила натяжения связана с растяжением жгута. Обозначим это растяжение как Δl:

$$T = k_2 \Delta l \ (1)$$

По условию нам дано, что длина жгута увеличилась в **β** раз. С учетом того, что первоначальная длина была дана по условию, имеем:

$$\beta = \frac{H_0 + \Delta l}{H_0} => \Delta l = H_0(\beta - 1) \ (2)$$

$$T = k_2 H_0(\beta - 1) \ (3)$$

Жгут тянет шайбу вниз, вертикальная проекция этой силы скомпенсирована дополнительным сжатием пружины:

$$k_1 \Delta H = T \sin\alpha = k_2 H_0 (\beta - 1) \sin\alpha \quad (4)$$

Здесь ***ΔH*** – изменение высоты пружины после натяжения жгута. Синус угла **α** запишем по определению из прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является половина жгута, а противолежащим катетом – половина длины пружины:

$$\sin\alpha = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l} \cdot \frac{2}{2} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + \Delta l} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 + H_0(\beta - 1)} = \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta} \quad (5)$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}\right)^2} \quad (6)$$

Подставим (5) в (4) и найдем ***ΔH***:

$$k_1 \Delta H = T \sin\alpha = k_2 H_0 (\beta - 1) \frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}$$

$$k_1 \Delta H = k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) (H_0 - \Delta H)$$

$$k_1 \Delta H + \Delta H k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) = H_0 k_2 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$$

$$\Delta H = \frac{H_0 k_2 (\beta - 1)}{\big(\beta k_1 + k_2(\beta - 1)\big)} \quad (7)$$

Сила натяжения жгута одинаковая по всей его длине. Силы, действующие на жгут в точке приложения силы ***F*** в проекции на горизонтальную плоскость:

$$F = 2T \cos\alpha$$

Подставляем все ранее найденные величины и получаем ответ:

$$F = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \left(\frac{H_0 - \Delta H}{H_0 \beta}\right)^2} = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{\Delta H}{H_0}\right)^2} \Rightarrow$$

$$F = 2k_2 H_0 (\beta - 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{k_2(\beta - 1)}{\beta k_1 + k_2(\beta - 1)}\right)^2}$$

Ответ:

$$F = 2k_2 H_0 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)}\right)^2}$$

9 класс, задача 5, вариант 1

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1 :

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$
$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{пр} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{пр}}{R_1} + \frac{R_{пр}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{\frac{R_{пр}}{R_1} + \frac{R_{пр}}{R_2}}{\frac{R_{пр}}{R_1} + \frac{R_{пр}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 5R, прибора – 2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

$$U_{пр} = U_x\left(1 - \frac{1}{\frac{R_{пр}}{R_1} + \frac{R_{пр}}{R_2} + 1}\right) = U_x\left(\frac{2 + \frac{2}{5}}{2 + \frac{2}{5} + 1}\right) = \frac{12}{17}U_x$$

$$U_1 = U_2 = \frac{5}{17}U_x$$

Зная максимально возможные значения напряжения для каждого элемента цепи – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $3U_0$, электроприбор при $5U_0$ – найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи:

$$R_1: U_0 = \frac{5}{17}U_x => U_x = 3.4U_0$$

$$R_2: 3U_0 = \frac{5}{17}U_x => U_x = 10.2U_0$$

$$\text{прибор}: 5U_0 = \frac{12}{17}U_x => U_x = 7\frac{1}{12}U_0$$

Таким образом при значении напряжения на источнике $U_x = 3{,}4\ U_0$ перегорит резистор R_1. В этот момент схема примет следующий вид:

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$I_{общ} = I_{пр} = I_2$$

$$U_x = U_{пр} + U_2$$

$$U_2 = U_x - U_{пр} = U_x - I_{пр}R_{пр} = U_x - I_{общ}R_{пр}$$

$$I_{общ} = \frac{U_x}{R_{общ}} = \frac{U_x}{R_{пр} + R_2}$$

$$U_2 = U_x - \frac{U_x R_{пр}}{R_{пр} + R_2} = U_x\left[1 - \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2}\right]$$

Напряжение на оставшемся резисторе R_2:

$$U_2 = U_x \left[1 - \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_2}{R_{пр} + R_2}\right]$$

Напряжение на приборе:

$$U_{пр} = I_{пр} R_{пр} = I_{общ} R_{пр} = U_x \frac{R_{пр}}{R_{пр} + R_2}$$

Используя соотношения для сопротивлений, получим:

$U_2 = \frac{5}{7} U_x$ - напряжение на резисторе R_2.

$U_{пр} = \frac{2}{7} U_x$ - напряжение на электроприборе.

В момент, когда сгорел резистор R_1, на источнике было выставлено напряжение $3.4U_0$. Следовательно, напряжение на сопротивлении R_2 в этот момент будет

$$U_2' = \frac{5}{7} * 3.4U_0 = 2\frac{3}{7} U_0 < 3U_0$$

$$U_{пр}' = \frac{2}{7} * 3.4U_0 = \frac{34}{35} U_0 < 5U_0$$

Следовательно, оставшиеся элементы не перегорают сразу вслед за сопротивлением R_1, и напряжение можно повышать дальше.

Найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи в этом случае:

При $U_x = 4{,}2\, U_0$ – сопротивление R_2; $U_x = 17{,}5\, U_0$ – электроприбор.

Таким образом, сначала при напряжении $U_x = 3{,}4\, U_0$ сгорит резистор R1, но ток продолжит течь по цепи. Далее, при напряжении на источнике $U_x = 4{,}2\, U_0$ перегорит и второй резистор, что уже приведет к полному обрыву цепи.

Ответ: $U_x = 4{,}2\, U_0$

9 класс, задача 5, , Вариант 2.

Электроприбор включен в цепь с двумя резисторами и источником постоянного напряжения (см. рисунок). Известно, что каждый из элементов цепи выходит из строя при определенных значениях напряжения, падающих на этом элементе – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $1.2U_0$, электроприбор при $3U_0$. Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Определите, при каком минимальном напряжении источника U_x электроприбор перестанет работать.

Решение:

Электроприбор перестанет работать в случае, если: оба сопротивления перегорят или перегорит сам прибор.

Обозначим за U_x напряжение источника. Запишем уравнения для цепи в начальный момент времени (рисунок 1):

$$\begin{cases} U_1 = I_1 R_1 \\ I_1 + I_2 = I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = \dfrac{U_x}{R_{\text{общ}}} \\ U_x = U_{\text{пр}} + U_1 \\ U_1 = U_2 \\ U_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

$$U_1 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$U_1 = U_x - R_{\text{пр}} \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right]$$

Напряжение на резисторе R_1 :

$$U_1 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}(R_1 + R_2)}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{R_1 R_2}{R_{\text{пр}} R_1 + R_{\text{пр}} R_2 + R_1 R_2}\right] = U_x \left[\frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right]$$

Используя соотношения:

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_1$$

$$U_{\text{пр}} = U_x - U_1$$

Получим напряжение на самом приборе:

$$U_{\text{пр}} = U_x \left(1 - \frac{1}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right) = U_x \left(\frac{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2}}{\dfrac{R_{\text{пр}}}{R_1} + \dfrac{R_{\text{пр}}}{R_2} + 1}\right)$$

Сопротивление первого резистора R_1 составляет R. Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Подставим значения сопротивлений в формулы для напряжения на каждом элементе цепи получим:

$$U_{\text{пр}} = U_x \left(\frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1} \right) = \frac{13}{28} U_x$$

$$U_1 = U_2 = \frac{15}{28} U_x$$

Зная максимально возможные значения напряжения для каждого элемента цепи – резистор R_1 при U_0, резистор R_2 при $1.2U_0$, электроприбор при $3U_0$ – найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи:

$$R_1: U_0 = \frac{15}{28} U_x => U_x = 1\frac{13}{15} U_0$$

$$R_2: 1.2U_0 = \frac{15}{28} U_x => U_x = 2\frac{6}{25} U_0$$

$$\text{прибор}: 3U_0 = \frac{13}{28} U_x => U_x = 6\frac{6}{13} U_0$$

Таким образом при значении напряжения на источнике $U_x = 1\frac{13}{15} U_0$ перегорит резистор R_1. В этот момент схема примет следующий вид:

В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$I_{\text{общ}} = I_{\text{пр}} = I_2$$

$$U_x = U_{\text{пр}} + U_2$$

$$U_2 = U_x - U_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = U_x - I_{\text{общ}} R_{\text{пр}}$$

$$I_{\text{общ}} = \frac{U_x}{R_{\text{общ}}} = \frac{U_x}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

$$U_2 = U_x - \frac{U_x R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2} = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2} \right]$$

Напряжение на оставшемся резисторе R_2:

$$U_2 = U_x \left[1 - \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2} \right] = U_x \left[\frac{R_2}{R_{\text{пр}} + R_2} \right]$$

Напряжение на приборе:

$$U_{\text{пр}} = I_{\text{пр}} R_{\text{пр}} = I_{\text{общ}} R_{\text{пр}} = U_x \frac{R_{\text{пр}}}{R_{\text{пр}} + R_2}$$

Сопротивление второго R_2 – 0.3R, прибора – 0.2R. Используя соотношения для сопротивлений, получим:

$U_2 = \frac{3}{5} U_x$ - напряжение на резисторе R_2.

$U_{\text{пр}} = \frac{2}{5} U_x$ - напряжение на электроприборе.

В момент, когда сгорел резистор R_1, на источнике было выставлено напряжение $1\frac{13}{15} U_0$. Следовательно, напряжение на сопротивлении R_2 в этот момент будет

$$U_2' = \frac{1}{5} * \frac{28}{5} U_0 = 1\frac{3}{25} U_0 < 1.2 U_0$$

$$U_{\text{пр}}' = \frac{2}{5} * \frac{28}{15} U_0 = \frac{56}{75} U_0 < 3 U_0$$

Следовательно, оставшиеся элементы не перегорают сразу вслед за сопротивлением R_1, и напряжение можно повышать дальше.

Найдем значения напряжения на источнике, при котором перегорит каждый элемент цепи в этом случае:

При $U_x = 2U_0$ – сопротивление R_2 ; $U_x = 7{,}5\ U_0$ – электроприбор.

Таким образом, сначала при напряжении $1\frac{13}{15} U_0$ сгорит резистор R_1, но ток продолжит течь по цепи. Далее, при напряжении на источнике $U_x = 2U_0$ перегорит и второй резистор, что уже приведет к полному обрыву цепи.

Ответ: $U_x = 2U_0$