Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2023-2024 гг.

Участникам заключительного этапа Олимпиады по физике предлагался один из заранее заготовленных вариантов, состоявший из 5 задач. Каждая задача составлялась в нескольких вариациях. При проверке работ проверялась корректность ход решения задачи и итогового ответа. Часть задач предлагались к решению участникам разных классов. Ниже в обозначениях задач указывается, участникам из каких классов они предназначались

Структура разбиения тем задач по вариантам для разных классов:

8.1 – равномерное движение, путь, перемещение, работа с графиком

8.2 – теплоемкости, теплота сгорания топлива, изменение температуры кипения с высотой

8-9.1 – статические блоки

8-9.2– сила Архимеда, закон Гука

8-9.3 – давление жидкости, сообщающиеся сосуды, гидростатика.

9-10.1 – Искусственные спутники

9-10.2 – Равноускоренное движение

10-11.1 – Электрические цепи с нелинейными элементами

10-11.2 – Статика

10-11.3 – Гидродинамика

11.1 – Диффузия

11.2 – Магнитная индукция

Задача 10.1

Вариант 1

Космический зонд массой m движется вокруг планеты X по перпендикулярной экваториальной плоскости круговой орбите радиуса R со скоростью v. Период обращения планеты вокруг своей оси равен T, причем $T \gg 2\pi R/v$. Когда зонд пролетал над северным полюсом, его орбита проходила точно над кратером, расположенном на экваторе, при этом зонд приближался к кратеру. В этот момент зонд совершил корректирующий маневр, выбросив струю газа со скоростью u относительно зонда в направлении, перпендикулярном плоскости первоначальной орбиты, и в итоге пролетел точно на кратером. Найдите массу топлива, которую выбросил зонд в ходе маневра. Выброс считайте мгновенным, а массу топлива малой по сравнению с массой зонда.

Примечание: для малых углов α можно считать $\sin(\alpha) \simeq \alpha$, $\cos(\alpha) \simeq 1$.

Решение:

Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление выброса газа, учитывая, что первоначальная скорость зонда была перпендикулярна этому направлению:

$$0 = \mu u - (m - \mu)v_T => \mu u = (m - \mu)v_T =>$$

$$\mu = \frac{mv_T}{u + v_T}$$

В результате маневра скорость зонда почти не изменилась, ее направление сдвинулось на некоторый угол α. Тогда:

$$v_T = v \sin \alpha$$

Обозначим время, за которое зонд долетел от полюса до экватора, как t. За это время он преодолел четверть длины окружности. Тогда:

$$v = \omega R => T = \frac{2\pi}{\omega} => v = \frac{2\pi R}{T} = t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi R}{4v} = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместился на угол α:

$$t = T\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\frac{L}{4v} = T\frac{\alpha}{2\pi} => \alpha = \frac{\pi L}{2vT}$$

И тогда:

$$\mu = \frac{mv_T}{u + v_T} = \frac{mv \sin \alpha}{u + v \sin \alpha} = \frac{mv \sin \frac{\pi L}{2vT}}{u + v \sin \frac{\pi L}{2vT}}$$

Вариант 2

Космический зонд массой m движется по круговой орбите со скоростью v вокруг планеты X, период обращения которой вокруг собственной оси равен T. Длина орбиты равна L. В момент, когда зонд пролетал над северным полюсом планеты, его скорость была направлена по касательной к окружности, проходящей при первом пересечении экватора над кратером Y. В этот момент зонд совершает корректирующий маневр, выбрасывая струю газа со скоростью u относительно зонда. В результате маневра модуль скорости зонда и высота орбиты не изменились. Считая выброс мгновенным, определите массу выброшенного топлива, если известно, что, достигнув экватора, зонд пролетел точно над кратером.

Решение:

Если бы спутник продолжал двигаться в том же направлении, то к моменту, когда он достигнет экватора, кратер сместиться на некоторое расстояние по экватору. Поэтому потребовался корректирующий маневр.

Обозначим за t время, за которое спутник преодолел расстояние до точки на экваторе, где расположен кратер. По условию нам дано, что модуль скорости спутника после маневра не изменился. Следовательно, спутник будет двигаться по окружности того же радиуса, смещенной на некоторый угол α. Двигаясь от северного полюса до экватора, он пройдет расстояние, равное четверти длины окружности. Следовательно:

$$t = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместиться на расстояние вдоль дуги окружности $R\alpha$, где R – радиус планеты, а угол α определяется из периода обращения планеты T:

$$t = \frac{\alpha}{2\pi}T => \alpha = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi L}{2vT}$$

По условию дано, что после выброса топлива модуль скорости зонда не изменился. Векторы скорости до и после образуют равнобедренный треугольник с углом α между равными сторонами. Тогда модуль вектора разности скоростей (приращения скорости в результате маневра) будет равен:

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = v\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = v\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi L}{2vT})}$$

Для соблюдения условия неизменности модуля скорости зонда после маневра направление выброса струи топлива должно быть противоположно направлению вектора $\overrightarrow{\Delta v}$. Поскольку выброс топлива считаем мгновенным, можем записать закон сохранения импульса до и после маневра следующим образом:

$$(m-\mu)\overrightarrow{\Delta v} = \mu\,\vec{u}$$

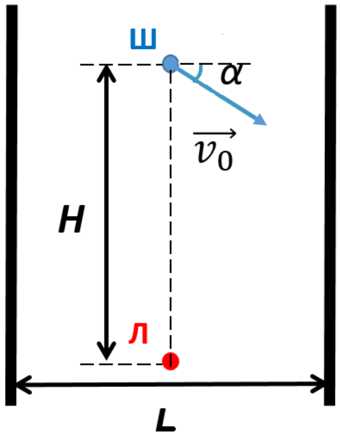
$$(m-\mu)\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu u => m\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu(u + \left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right|)$$

И масса топлива тогда может быть найдена, используя ранее полученное выражение для $|\overrightarrow{\Delta v}|$:

$$\mu = m|\overrightarrow{\Delta v}|/(u + |\overrightarrow{\Delta v}|)$$

Задача 10.2

На горизонтальной поверхности закреплены два гладких параллельных бортика, расстояние между ними равно L. Посередине между ними на расстоянии H друг от друга расположены шайба (Ш) и лунка (Л). По шайбе ударяют, сообщая ей скорость v_0 в направлении к одному из бортов под углом α. Определите минимальное значение угла α, при котором шайба попадет в лунку. Размерами шайбы и лунки можно пренебречь. Шайба отскакивает от бортиков абсолютно упруго. Коэффициент трения шайбы о горизонтальную поверхность равен μ.



Решение:

По условию дано, что шайба попала в лунку. Поскольку угол, под которым направляют шайбу к бортику, не определен, заранее неизвестно, сколько раз он отскакивает от бортиков перед тем, как попасть в лунку.

Можно воспользоваться тем обстоятельством, что шайба отскакивает от бортиков упруго, т.е. модуль скорости сохраняется, меняется только ее направление. Между столкновениями движение описывается законами Ньютона. Сила трения равна

$$F_{тр} = \mu m g$$

Найдем ускорение из

$$ma = -\mu m g$$

Масса шайбы уходит из уравнения

Движение получается равнозамедленным из-за наличия трения между шайбой и поверхностью

$$v_0 - at = v$$

Расстояние l, которое проходит шайба, равно:

$$v_0 t - at^2/2 = l$$

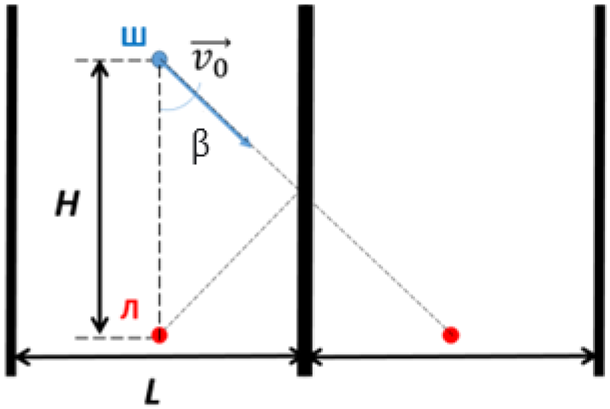
Для нахождения максимального расстояния, которое проходит шайба, воспользуемся экстремальным значением скорости:

$$v_0 - at = 0$$

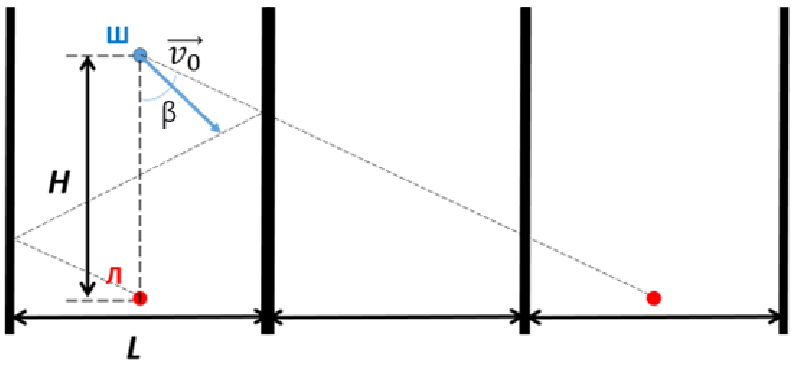
Тогда

$$l_{max} = v_0^2/2a$$

За счет того, что при упругом столкновении угол падения равен углу отражения, мы можем описать движение после столкновения как движение по прямой в зеркально отраженном относительно бортика пространстве. Пусть $\beta = 90^\circ - \alpha$



Таким образом, копируя и зеркально отражая пространство между бортиками после каждого столкновения, мы можем рассматривать движение шайбы с n столкновениями от бортиков просто как движение по прямой от исходной точки до точки Л' которая находится в n-й зеркальной копии пространства между бортиками.



Ищем наибольшее число столкновений n, при котором l остается меньше $lmax$

$$\sin\alpha = \frac{H}{l}$$

$$\cos\alpha = \frac{nL}{l}$$

Из тригонометрического тождества равенства единице сумме квадратов синуса и косинуса угла, число столкновений n равно

$$n = \sqrt{(l^2 - H^2)/L^2}$$

Тогда наибольшее число столкновений – округленное вниз значение

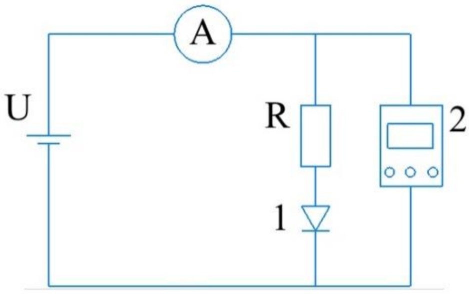
$$n_{max} = \sqrt{\left(l_{max}{}^2 - H^2\right)/L^2}$$

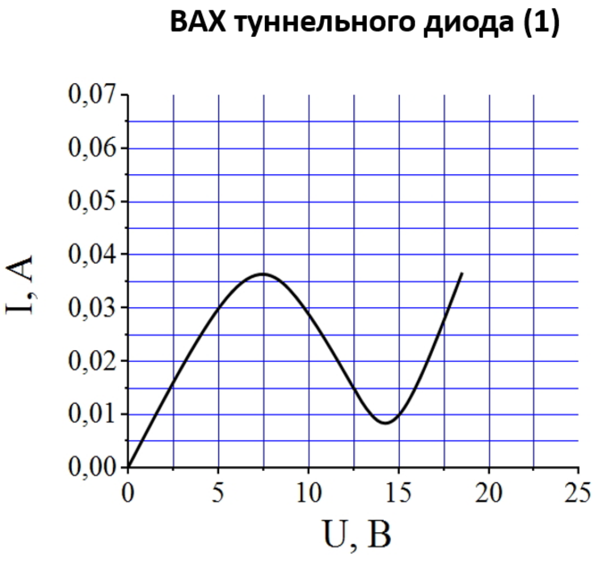
И угол можно найти из соотношения

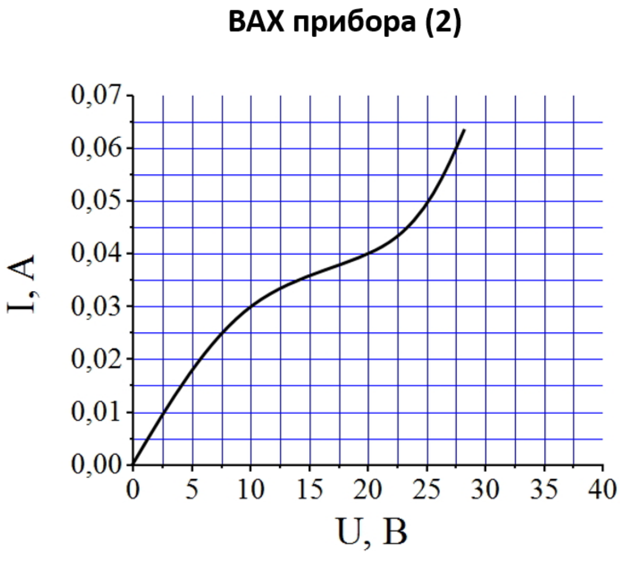
$$\alpha_{min} = \mathrm{arctg}\left(\frac{H}{n_{max}L}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{H}{\sqrt{(v_0^2/2\mu g)^2 - H^2}}\right)$$

Задача 10.1

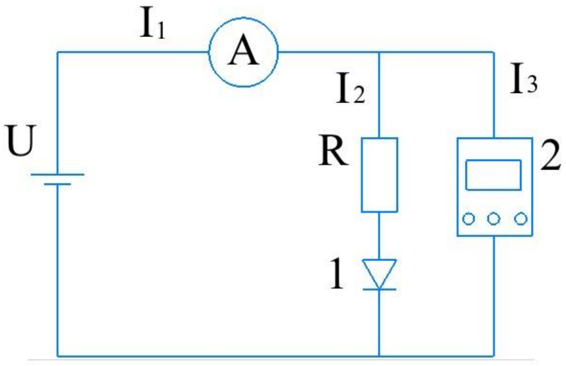
Резистор R, туннельный диод 1 и прибор 2 включены в электрическую схему, как показано на рисунке. Напряжение источника U, питающего цепь, составляет 20 В. Максимально допустимая мощность источника составляет 1 Вт. Сопротивление резистора R составляет 500 Ом. Вольт-амперные характеристики (ВАХ) диода и прибора изображены на графиках ниже. Определите показания амперметра, если схема работает в допустимом режиме. Внутренним сопротивлением источника пренебрегите.







Решение:



Обозначим токи, как показано на рисунке 4 и составим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ U_0 = U_R + U_1 \\ U = U_2 \end{cases},$$

где U_1- напряжение на туннельном диоде U_2-наприжение на приборе.

Перепишем систему уравнения в следующем виде:

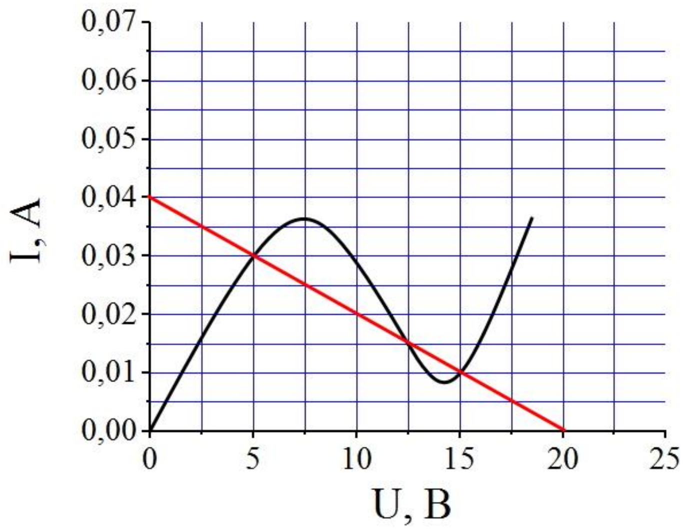
$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 \\ U_0 = I_2 \cdot R + U_1 \\ U = U_2 \end{cases}$$

Из ВАХ прибора найдем ток, протекающий через него: $I_3 = 0.04$ A.

Из системы уравнений получим уравнения для тока через резистор и диод:

$I_2 = \frac{U - U_1}{R}$.

Графическим методом найдем ток через диод и резистор.



Ток I_2 может принимать значения 0.03 А, 0.015 А, 0.01 А.

Следовательно общий ток цепи I_1 может также принимать три различных значения 0.05 А, 0.055 А, 0.07 А, но он не может превысить 0.05 А из-за ограничения в мощности.

Задача 10.2

Вариант 1:

Мотоциклист пытается сдвинуть тяжелый груз массой M с места с помощью своего заднеприводного мотоцикла. Он привязал груз веревками к оси заднего колеса, запустил двигатель и стал постепенно увеличивать обороты заднего колеса. В некоторый момент переднее колесо оторвалось от земли, двигатель пришлось заглушить, но груз так и не сдвинулся с места. Определите, груз какой массы нужно закрепить мотоциклисту на оси переднего колеса, чтобы получилось сдвинуть груз с места. Радиус колес равен R, расстояние между осями колес равно L, масса мотоцикла с мотоциклистом равна m, а их центр тяжести расположен посередине между осями колес. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность равен μ и монотонно возрастает с частотой обращения заднего колеса.

Вариант 2:

Мотоциклист пытается сдвинуть камень массой M с места с помощью своего заднеприводного мотоцикла. Он привязал груз веревками к оси заднего колеса, запустил двигатель и стал постепенно увеличивать обороты заднего колеса. В некоторый момент переднее колесо оторвалось от земли, двигатель пришлось заглушить, но камень так и не сдвинулся с места. Мотоциклист решает закрепить на корпусе мотоцикла дополнительный груз массой Δm, расположив его на отрезке между осями колес. Определите, на каком расстоянии от оси заднего колеса ему нужно расположить этот груз, чтобы получилось сдвинуть камень с места. Радиус колес равен R, расстояние между осями колес равно L, масса мотоцикла с мотоциклистом равна m, а их центр тяжести расположен посередине между осями колес. Коэффициент трения скольжения колеса о поверхность равен μ и монотонно возрастает с частотой обращения заднего колеса.

Решение:

Допустим, груз сдвинулся. Минимальная масса груза будет тогда, когда переднее колесо почти оторвалось. Следовательно, весь вес приходится на заднее колесо. По второму закону Ньютона:

$$(m + \Delta m)g = N_1$$

Если переднее колесо оторвалось, то в горизонтальном направлении движет только сила трения от заднего колеса:

$$\mu_0 Mg = \mu N_1 = \mu(m + \Delta m)g$$

Условие отрыва переднего колеса из правила моментов (то, что сила реакции опоры на второе колесо равно нулю $N_2 = 0$).

Вариант 1: масса дополнительного груза неизвестна

$$\mu(m + \Delta m_x)gR = \frac{mgL}{2} + \Delta m_x gL$$

$$\Delta m_x = \frac{m\left(\frac{L}{2} - \mu R\right)}{\mu R - L}$$

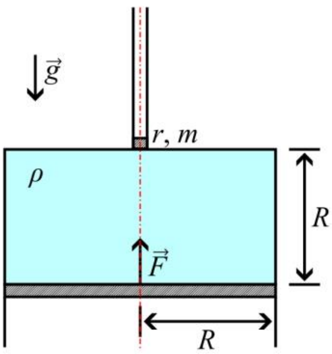
Вариант 2: расположение дополнительного груза неизвестно

$$x = \mu\left(1 + \frac{m}{\Delta m}\right)R - \frac{mL}{2\Delta m}$$

Задача 10.3

Вариант 1:

В сосуде с двумя поршнями, как показано на рисунке, находится идеальная несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. Трение между поршнями и стенками отсутствует. В начальный момент поршни и жидкость покоятся. Затем большой поршень начинает действовать на жидкость с постоянной силой $\boldsymbol{F}$, в результате чего маленький поршень начинает подниматься. **Найдите максимальную высоту подъёма** малого поршня $\boldsymbol{h_{max}}$, используя предположения, что $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{h_{max}}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус узкой трубки, $\boldsymbol{R}$ **-** радиус большого поршня. Считайте, что жидкость движется без завихрений и скорость однородна по сечению узкой трубки. Известны следующие величины: масса $\boldsymbol{m}$ и радиус **r** малого поршня, радиус **R** большого поршня и приложенная к нему сила $\boldsymbol{F}$, плотность жидкости $\boldsymbol{\rho}$, ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$.



Решение:

Найдём максимальную высоту через энергии. В данной системе работа **A** совершается поршнем, когда он перемещается. За счёт этой работы увеличиваются кинетические и потенциальные энергии малого поршня и жидкости:

$$A = \Delta E_{\text{пот,пор}} + \Delta E_{\text{кин,пор}} + \Delta E_{\text{пот,ж}} + \Delta E_{\text{кин,ж}}$$

Получим выражения для каждого из слагаемых, пренебрегая малыми величинами.

Работу можно выразить как

$$A = FH = Fh\frac{r^2}{R^2}$$

Где было использовано соотношение

$$hr^2 = HR^2$$

т.к. объём жидкости сохраняется (объём жидкости, поднявшейся в узкую трубку, равен объёмы, вытесненному большим поршнем).

Увеличение потенциальной энергии поршня в поле силы тяжести находится как:

$$\Delta E_{\text{пот,пор}} = mgh$$

Увеличение кинетической энергии поршня находится как:

$$\Delta E_{\text{кин,пор}} = \frac{m v_r^2}{2}$$

где v_r - скорость поршня и жидкости в узкой трубке радиуса r.

Увеличение потенциальной энергии жидкости в поле силы тяжести можно найти как:

$$\Delta E_{\text{пот,ж}} = E_{\text{пот,ж}}(h) - E_{\text{пот,ж}}(0) = \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right) - \rho\pi R^2 H\, g\, \left(\frac{1}{2}H\right)$$
$$= \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R - \frac{1}{2}H\right)$$

где $\rho\pi r^2 h$ - масса жидкости в узкой трубке, а $\left(\frac{1}{2}h + R\right)$ - высота центра масс над начальным уровнем большого поршня. В рассматриваемом состоянии системы этот объём жидкости появился вместо вытесненного большим поршнем объёма $\rho\pi R^2 H$ с центром масс на высоте $\frac{1}{2}H$.

Так как имеется следующее соотношение

$$\frac{H}{h} = \frac{r^2}{R^2} << 1$$

то есть H << h, последним слагаемым в выражении $\Delta E_{\text{пот,ж}}$ можно пренебречь, и тогда

$$\Delta E_{\text{пот,ж}} = \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right)$$

Увеличение кинетической энергии жидкости можно записать как

$$\Delta E_{\text{кин,ж}} = \rho\pi r^2 h \frac{v_r^2}{2} + E_R$$

Где E_R - кинетическая энергия жидкости в большом резервуаре. Вблизи большого поршня жидкость двигается вверх с его скоростью, а вблизи соединения с узкой трубкой ускоряется. В общем случае, её стоит вычислять как

$$E_R = \rho \int\limits_V \frac{v(\vec{x})}{2} d\vec{x}$$

Характерные размеры переходной области, где жидкость ускоряется и движется со скоростью, уже близкой к v_r, совпадают с радиусом узкой трубки. Можно считать, что в остальной области скорость близка к скорости большого поршня v_R. Тогда можно подобрать две константы C_1 и C_2, значения которых имеют порядок единицы, что

$$E_R = C_1 \rho\pi r^2 r \frac{v_r^2}{2} + C_2 \rho\pi R^2 R \frac{v_R^2}{2}$$

Из несжимаемости жидкости, для скоростей имеется соотношение

$$v_r r^2 = v_R R^2$$

Откуда

$$v_R^2 = v_r^2 \frac{r^4}{R^4}$$

Тогда

$$E_R = \rho\pi r^2 r\frac{v_r^2}{2}\left(C_1 + C_2\frac{r}{R}\right)$$

Теперь видно, с учётом r << h, что эта часть кинетической энергии много меньше первого слагаемого в выражении $\Delta E_{\text{кин,ж}}$. То есть кинетической энергией жидкости в большом резервуаре можно пренебречь. Тогда можно записать

$$\Delta E_{\text{кин,ж}} = \rho\pi r^2 h\frac{v_r^2}{2}$$

В итоге получаем следующее уравнение:

$$Fh\frac{r^2}{R^2} = mgh + \frac{mv_r^2}{2} + \rho\pi r^2 h\, g\, \left(\frac{1}{2}h + R\right) + \rho\pi r^2 h\frac{v_r^2}{2}$$

В системе поршень и жидкость сначала будут ускоряться, затем, когда поршень поднимется выше равновесного положения, он начнёт замедляться. В наивысшей точке его скорость обратиться в ноль:

$$v_r = 0$$

И в уравнении можно будет сократить h. Получим

$$F\frac{r^2}{R^2} = mg + \rho\pi r^2 g\, \left(\frac{1}{2}h_{max} + R\right)$$

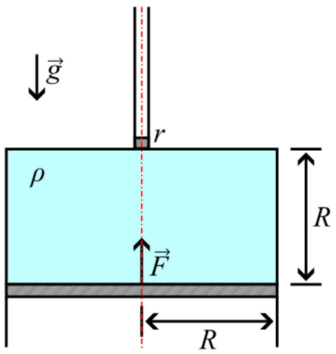
Откуда можно найти h_{max}

$$\frac{1}{2}h_{max} + R = \frac{F\frac{r^2}{R^2} - mg}{\rho\pi r^2 g}$$

$$h_{max} = \frac{2F}{\rho\pi R^2 g} - \frac{2m}{\rho\pi r^2} - 2R$$

Вариант 2:

В сосуде с двумя поршнями, как показано на рисунке, находится идеальная несжимаемая жидкость в поле силы тяжести. Трение между поршнями и стенками отсутствует. В начальный момент поршни и жидкость покоятся. Затем большой поршень начинает действовать на жидкость с постоянной силой $\boldsymbol{F}$, в результате чего маленький поршень начинает подниматься. **Найдите массу малого поршня**, если в определённый момент движения были измерены высота подъёма $\boldsymbol{h_0}$ и скорость $\boldsymbol{v_0}$ поршня. Используйте предположения, что $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{r} << \boldsymbol{h_0}$, где $\boldsymbol{r}$ - радиус узкой трубки, $\boldsymbol{R}$ **-** радиус большого поршня. Считайте, что жидкость движется без завихрений и скорость однородна по сечению узкой трубки. Также известны следующие величины: радиус **r** малого поршня, радиус **R** большого поршня и приложенная к нему сила $\boldsymbol{F}$, плотность жидкости $\boldsymbol{\rho}$, ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$.



$\vec{g}$
r
ρ
R
$\vec{F}$
R