Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2023-2024 гг.

Участникам заключительного этапа Олимпиады по физике предлагался один из заранее заготовленных вариантов, состоявший из 5 задач. Каждая задача составлялась в нескольких вариациях. При проверке работ проверялась корректность ход решения задачи и итогового ответа. Часть задач предлагались к решению участникам разных классов. Ниже в обозначениях задач указывается, участникам из каких классов они предназначались

Структура разбиения тем задач по вариантам для разных классов:

8.1 – равномерное движение, путь, перемещение, работа с графиком

8.2 – теплоемкости, теплота сгорания топлива, изменение температуры кипения с высотой

8-9.1 – статические блоки

8-9.2– сила Архимеда, закон Гука

8-9.3 – давление жидкости, сообщающиеся сосуды, гидростатика.

9-10.1 – Искусственные спутники

9-10.2 – Равноускоренное движение

10-11.1 – Электрические цепи с нелинейными элементами

10-11.2 – Статика

10-11.3 – Гидродинамика

11.1 – Диффузия

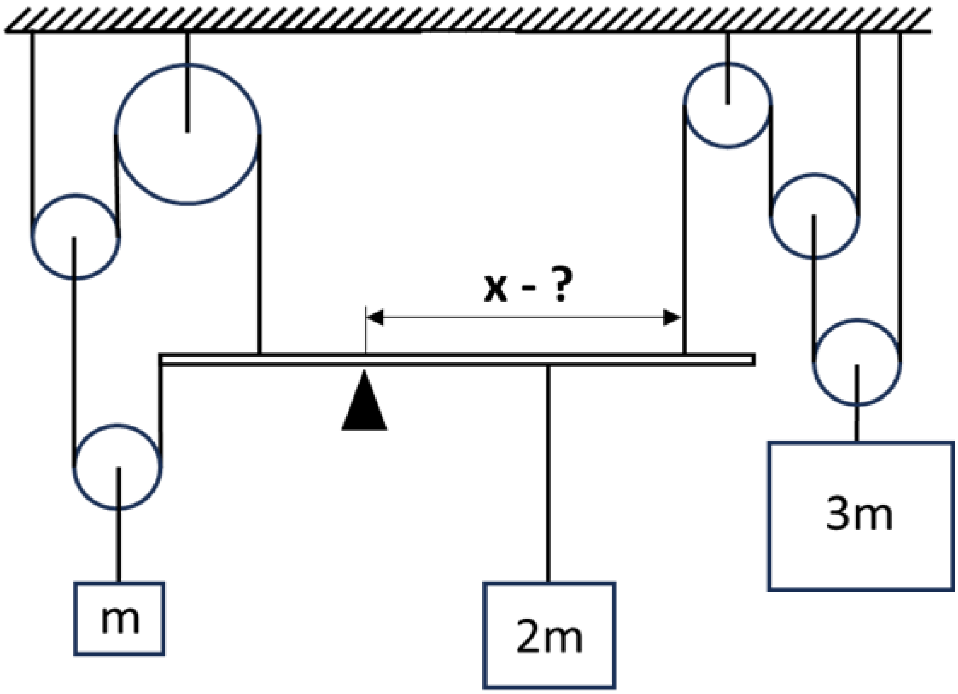
11.2 – Магнитная индукция

Задача 9.1

Вариант 1

Невесомая балка находится в равновесии и делится точкой опоры в отношении 2:3. К левой короткой части балки через систему блоков с подвешенным грузом массой m прикреплены две нити, одна к самому краю, другая к середине этой части балки. К правой части на некотором расстоянии **x** от точки опоры через систему блоков прикреплена другая нить. К середине длинной части подвешен груз массой 2m. В правой системе блоков подвешен груз массой 3m.

Какую часть от всей длины балки составляет расстояние x от точки опоры до нити в правой части системы. Все блоки, нити и пружину считать невесомыми, трение в системе отсутствует.



Расставим силы натяжения нитей, которые закреплены к балке:

$T_1 = 0{,}5mg$; $T_2 = 0{,}25mg$; $T_3 = 2mg$; $T_4 = 0{,}75mg$

Примем длину всей балки за L. Запишем условие равновесия (правило моментов):

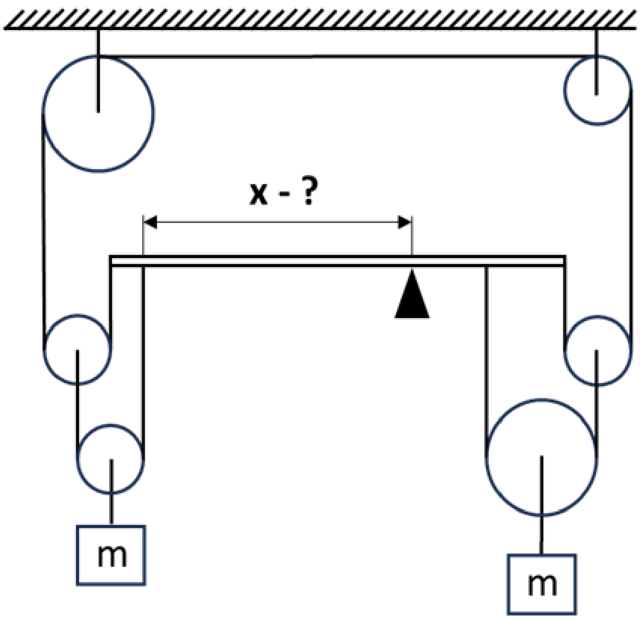
$T_1 \cdot 0{,}4L + T_4 \cdot x = T_2 \cdot 0{,}2L + T_3 \cdot 0{,}3L \Rightarrow 0{,}2mgL + 0{,}75mgx = 0{,}05mgL + 0{,}6mgL$

Поделим обе части уравнения на mg и помножим на 100

20L+75x=5L+60L => 75x=45L => **<u>x=0,6L (то есть к правому концу балки)</u>**

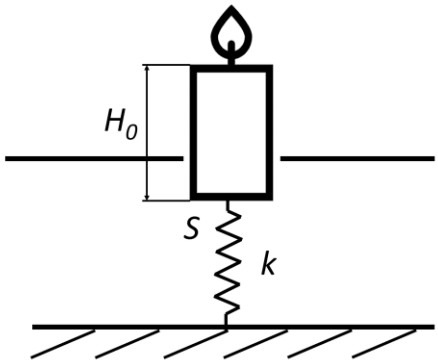
Вариант 2

Невесомая балка находится в равновесии и делится точкой опоры в отношении 3:2. К левой длинной части балки через систему блоков с подвешенным грузом массой m прикреплены две нити, одна к самому краю, другая на расстоянии **x** от точки опоры. К правой части через систему блоков тоже прикреплены две нити: одна к середине этой части балки, другая к правому краю. К одному из блоков в правой части за пружину подвешен груз массой m. Определите, какую часть от всей длины балки составляет расстояние x от точки опоры до нити в левой части системы. Все блоки, нити и пружину считать невесомыми, трение в системе отсутствует.



Задача 9.2

Парафиновая цилиндрическая свечка высотой H_0 и площадью основания S плавает в бассейне. Свечка прикреплена к полу бассейна пружинкой с жесткостью k (см. рисунок), пружина растянута. Свечку поджигают. Пока горит фитиль, парафин медленно испаряется, форма свечки при этом остается цилиндрической, ее высота уменьшается со скоростью c. Определите, как и с какой скоростью будет изменяться растяжение пружинки.



Решение

Обозначим зависимость высоты свечки от времени как *H(t)*. По условию оно дается выражением:

$$H(t) = H_0 - ct$$

Обозначим за *h(t)* зависимость от времени высоты погруженной части свечки. По условию сказано, что свечка горит медленно и с постоянной скоростью, поэтому второй закон Ньютона может быть записан как:

$$mg + k\Delta x = \rho_{\text{в}} g h(t) S => \rho_{\text{п}} H(t) + \frac{k\Delta x}{Sg} = \rho_{\text{в}} h(t)$$

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct) + \frac{k\Delta x(t)}{Sg} = \rho_{\text{в}} h(t)$$

Поскольку глубина бассейна остается неизменной, можно записать:

$$x_0 + \Delta x(t) + h(t) = G => \Delta x(t) = G - h(t) - x_0$$

Подставим в исходное выражение:

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct) + \frac{k}{Sg}(G - h(t) - x_0) = \rho_{\text{в}} h(t)$$

И тогда зависимость $h(t)$:

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct) + \frac{k}{Sg}G - \frac{k}{Sg}x_0 = \left(\rho_{\text{в}} + \frac{k}{Sg}\right)h(t)$$

Рассмотрим два произвольных момента времени t1 и t2, причем t2>t1:

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct_2) + \frac{k}{Sg}G - \frac{k}{Sg}x_0 = \left(\rho_{\text{в}} + \frac{k}{Sg}\right)h(t_2)$$

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct_1) + \frac{k}{Sg}G - \frac{k}{Sg}x_0 = \left(\rho_{\text{в}} + \frac{k}{Sg}\right)h(t_1)$$

Вычтем из первого второе:

$$\rho_{\text{п}}(H_0 - ct_2) - \rho_{\text{п}}(H_0 - ct_1) = \left(\rho_{\text{в}} + \frac{k}{Sg}\right)h(t_2) - \left(\rho_{\text{в}} + \frac{k}{Sg}\right)h(t_1)$$

$$-c\rho_{п}(t_2 - t_1) = \left(\rho_{в} + \frac{k}{Sg}\right)(h(t_2) - h(t_1))$$

$$-\frac{c\rho_{п}}{\left(\rho_{в} + \frac{k}{Sg}\right)} = \frac{h(t_2) - h(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Высота погруженной части будет уменьшаться со скоростью:

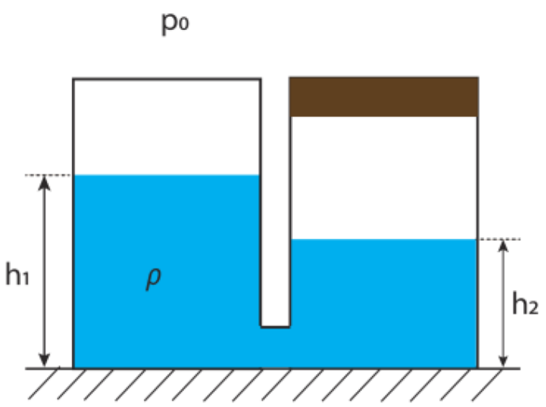
$$v = -\frac{c\rho_{п}}{\left(\rho_{в} + \frac{k}{Sg}\right)}$$

Значит пружинка будет удлиняться с той же скоростью.

Задача 9.3

Вариант 1

В закрытой комнате, где атмосферное давление составляет p_0 = 100 кПа находятся два пустых одинаковых сосуда высотой H = 70 см и площадью основания S = 150 см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна, и один из сосудов закрыт тонкой пробкой. Необходимо определить объем жидкости с плотностью ρ = 930 кг/м^3, который нужно влить в открытый сосуд (при этом жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна F = 45 Н. Поскольку температура в помещении постоянна, то для воздуха в замкнутом объеме произведение давления и объема остается неизменным: pV = const. Объём цилиндра можно рассчитать по формуле: V = Sh, где S – площадь основания, h – высота цилиндра. Массой пробки, её размером и размером соединительной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.



Решение:

Изначально сосуды пустые. Как только начинают наливать жидкость, воздух в закрытом сосуде становится изолированным от воздуха в комнате. По мере наливания жидкости объем воздуха в сосуде уменьшается, а его давление увеличивается, что подтверждается условием pV = const.

Чтобы выдавить пробку давление изолированного воздуха p должно стать достаточно большим, то есть: $p = F/S+p_0$, где F/S давление необходимое для того, чтобы преодолеть силу трения пробки, а p_0 давление атмосферы с внешней части пробки.
Запишем для этой ситуации баланс давлений в левой и правой части системы:

$$p_0+\rho gh_1=p+\rho gh_2 \Rightarrow p_0+\rho gh_1=F/S+p_0+\rho gh_2 \Rightarrow \rho gh_1=F/S+\rho gh_2.$$

Где h_1 – высота столба жидкости в открытом сосуде, h_2 – высота столба жидкости в сосуде, закрытом пробкой.

В то же время, для воздуха в сосуде справедливо равенство (применим условие pV = const для состояния до наливания жидкости и после наливания в момент, когда пробка начнёт движение, объём найдём через формулу для объёма цилиндра $V_1=HS$, т.к толщиной пробки можно пренебречь):

$$p_0V_1=pV_2 \Rightarrow p_0HS=p(H-h_2)S \Rightarrow p_0H=(F/S+p_0)(H-h_2)\Rightarrow 0=FH/S-Fh_2/S-p_0h_2 \Rightarrow h_2=FH/(F+p_0S).$$

Подставим h_2 в первое уравнение:

$$\rho gh_1=F/S+\rho gFH/(F+p_0S).$$

И найдем h_1:

$$h_1=F/(S\rho g)+FH/(F+p_0S).$$

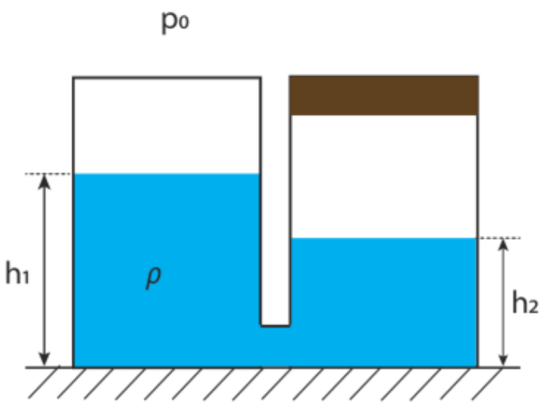
Тогда искомый объем:

$$V = S(h_1+h_2)=S(F/(S\rho g)+2FH/(F+p_0S))=F(1/(\rho g)+2SH/(F+p_0S)).$$

Подставляя числа, получаем ответ V = 5450 см3 (при g=10 м/с2). Если объем налитой жидкости хоть немного превысит это значение, то пробка вылетит.

Вариант 2

В закрытой комнате, где атмосферное давление составляет p_0 = 100 кПа находятся два одинаковых сосуда высотой H = 100 см и площадью основания S = 100 см^2. Сосуды соединены тонкой трубкой, расположенной у дна. Оба сосуда заполнили на четверть водой плотностью ρ = 1000 кг/м^3, после чего один из сосудов плотно закрыли тонкой пробкой. Необходимо определить объём воды, который нужно влить в открытый сосуд (при этом жидкость не переливается через край), чтобы пробка вылетела. Максимальная величина силы трения покоя, действующей на пробку, равна F = 20 Н. Поскольку температура в помещении постоянна, то для воздуха в замкнутом объеме произведение давления и объема остается неизменным: pV = const. Объём цилиндра можно рассчитать по формуле: V = Sh, где S – площадь основания, h – высота цилиндра. Массой пробки, её размером и размером соединительной трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения принять за 10 м/с^2.



Задача 9.1

Вариант 1

Космический зонд массой m движется вокруг планеты X по перпендикулярной экваториальной плоскости круговой орбите радиуса R со скоростью v. Период обращения планеты вокруг своей оси равен T, причем $T \gg 2\pi R/v$. Когда зонд пролетал над северным полюсом, его орбита проходила точно над кратером, расположенном на экваторе, при этом зонд приближался к кратеру. В этот момент зонд совершил корректирующий маневр, выбросив струю газа со скоростью u относительно зонда в направлении, перпендикулярном плоскости первоначальной орбиты, и в итоге пролетел точно на кратером. Найдите массу топлива, которую выбросил зонд в ходе маневра. Выброс считайте мгновенным, а массу топлива малой по сравнению с массой зонда.

Примечание: для малых углов α можно считать $\sin(\alpha) \simeq \alpha$, $\cos(\alpha) \simeq 1$.

Решение:

Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление выброса газа, учитывая, что первоначальная скорость зонда была перпендикулярна этому направлению:

$$0 = \mu u - (m - \mu)v_T => \mu u = (m - \mu)v_T =>$$

$$\mu = \frac{m v_T}{u + v_T}$$

В результате маневра скорость зонда почти не изменилась, ее направление сдвинулось на некоторый угол α. Тогда:

$$v_T = v \sin \alpha$$

Обозначим время, за которое зонд долетел от полюса до экватора, как t. За это время он преодолел четверть длины окружности. Тогда:

$$v = \omega R => T = \frac{2\pi}{\omega} => v = \frac{2\pi R}{T} = t = \frac{T}{4} = \frac{2\pi R}{4v} = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместился на угол α:

$$t = T\frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\frac{L}{4v} = T\frac{\alpha}{2\pi} => \alpha = \frac{\pi L}{2vT}$$

И тогда:

$$\mu = \frac{mv_T}{u + v_T} = \frac{mv\sin\alpha}{u + v\sin\alpha} = \frac{mv\sin\frac{\pi L}{2vT}}{u + v\sin\frac{\pi L}{2vT}}$$

Вариант 2

Космический зонд массой m движется по круговой орбите со скоростью v вокруг планеты X, период обращения которой вокруг собственной оси равен T. Длина орбиты равна L. В момент, когда зонд пролетал над северным полюсом планеты, его скорость была направлена по касательной к окружности, проходящей при первом пересечении экватора над кратером Y. В этот момент зонд совершает корректирующий маневр, выбрасывая струю газа со скоростью u относительно зонда. В результате маневра модуль скорости зонда и высота орбиты не изменились. Считая выброс мгновенным, определите массу выброшенного топлива, если известно, что, достигнув экватора, зонд пролетел точно над кратером.

Решение:

Если бы спутник продолжал двигаться в том же направлении, то к моменту, когда он достигнет экватора, кратер сместиться на некоторое расстояние по экватору. Поэтому потребовался корректирующий маневр.

Обозначим за t время, за которое спутник преодолел расстояние до точки на экваторе, где расположен кратер. По условию нам дано, что модуль скорости спутника после маневра не изменился. Следовательно, спутник будет двигаться по окружности того же радиуса, смещенной на некоторый угол α. Двигаясь от северного полюса до экватора, он пройдет расстояние, равное четверти длины окружности. Следовательно:

$$t = \frac{L}{4v}$$

За это же время кратер сместиться на расстояние вдоль дуги окружности $R\alpha$, где R – радиус планеты, а угол α определяется из периода обращения планеты T:

$$t = \frac{\alpha}{2\pi}T \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi t}{T} = \frac{\pi L}{2vT}$$

По условию дано, что после выброса топлива модуль скорости зонда не изменился. Векторы скорости до и после образуют равнобедренный треугольник с углом α между равными сторонами. Тогда модуль вектора разности скоростей (приращения скорости в результате маневра) будет равен:

$$\left|\overrightarrow{\Delta v}\right| = v\sqrt{2(1-\cos\alpha)} = v\sqrt{2(1-\cos\frac{\pi L}{2vT})}$$

Для соблюдения условия неизменности модуля скорости зонда после маневра направление выброса струи топлива должно быть противоположно направлению вектора $\overrightarrow{\Delta v}$. Поскольку выброс топлива считаем мгновенным, можем записать закон сохранения импульса до и после маневра следующим образом:

$$(m-\mu)\overrightarrow{\Delta v} = \mu\,\vec{u}$$

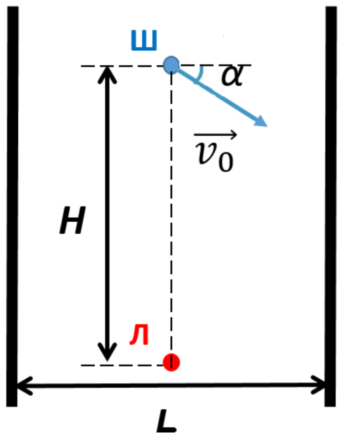
$$(m-\mu)\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu u \Rightarrow m\left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right| = \mu(u + \left|\overrightarrow{(\Delta v)}\right|)$$

И масса топлива тогда может быть найдена, используя ранее полученное выражение для $|\overrightarrow{\Delta v}|$:

$$\mu = m|\overrightarrow{\Delta v}|/(u + |\overrightarrow{\Delta v}|)$$

Задача 9.2

На горизонтальной поверхности закреплены два гладких параллельных бортика, расстояние между ними равно L. Посередине между ними на расстоянии H друг от друга расположены шайба (Ш) и лунка (Л). По шайбе ударяют, сообщая ей скорость v_0 в направлении к одному из бортов под углом α. Определите минимальное значение угла α, при котором шайба попадет в лунку. Размерами шайбы и лунки можно пренебречь. Шайба отскакивает от бортиков абсолютно упруго. Коэффициент трения шайбы о горизонтальную поверхность равен μ.



Решение:

По условию дано, что шайба попала в лунку. Поскольку угол, под которым направляют шайбу к бортику, не определен, заранее неизвестно, сколько раз он отскакивает от бортиков перед тем, как попасть в лунку.

Можно воспользоваться тем обстоятельством, что шайба отскакивает от бортиков упруго, т.е. модуль скорости сохраняется, меняется только ее направление. Между столкновениями движение описывается законами Ньютона. Сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu m g$$

Найдем ускорение из

$$ma = -\mu m g$$

Масса шайбы уходит из уравнения

Движение получается равнозамедленным из-за наличия трения между шайбой и поверхностью

$$v_0 - at = v$$

Расстояние l, которое проходит шайба, равно:

$$v_0 t - at^2/2 = l$$

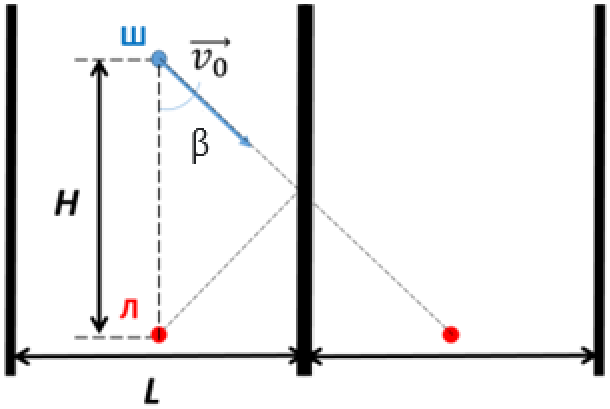
Для нахождения максимального расстояния, которое проходит шайба, воспользуемся экстремальным значением скорости:

$$v_0 - at = 0$$

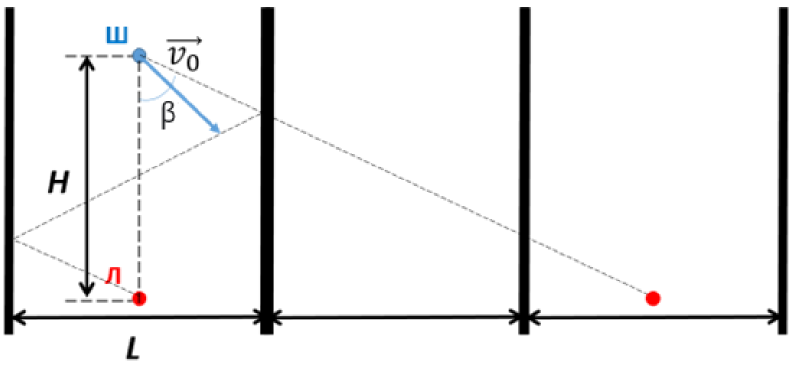
Тогда

$$l_{max} = v_0^2/2a$$

За счет того, что при упругом столкновении угол падения равен углу отражения, мы можем описать движение после столкновения как движение по прямой в зеркально отраженном относительно бортика пространстве. Пусть $\beta = 90^\circ - \alpha$



Таким образом, копируя и зеркально отражая пространство между бортиками после каждого столкновения, мы можем рассматривать движение шайбы с n столкновениями от бортиков просто как движение по прямой от исходной точки до точки Л' которая находится в n-й зеркальной копии пространства между бортиками.



Ищем наибольшее число столкновений n, при котором l остается меньше $lmax$

$$\sin\alpha = \frac{H}{l}$$

$$\cos\alpha = \frac{nL}{l}$$

Из тригонометрического тождества равенства единице сумме квадратов синуса и косинуса угла, число столкновений n равно

$$n = \sqrt{(l^2 - H^2)/L^2}$$

Тогда наибольшее число столкновений – округленное вниз значение

$$\mathrm{n_{max}} = \sqrt{\left(l_{max}{}^{2} - H^2\right)/L^2}$$

И угол можно найти из соотношения

$$\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{n_{max}L}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{H}{\sqrt{(v_0^2/2\mu g)^2 - H^2)}}\right)$$