

Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2024-2025 гг.

Задача

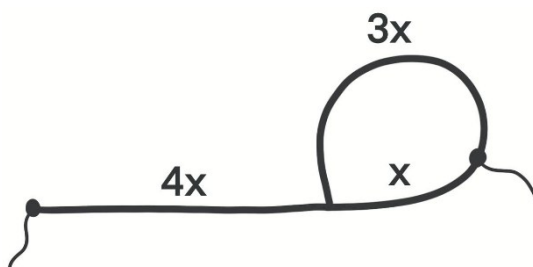
Согнутая проволока

Вариант 1.1

Одну клемму источника тока подключили к концу медной проволоки, вторую на некотором расстоянии от первой клеммы, так чтобы длина всей проволоки делилась на два отрезка в отношении 5:3. Свободный конец медной проволоки припаяли к середине этой проволоки, так что образовалась петля. Известно, что длина проволоки равна 80 см, площадь поперечного сечения $0,2 \text{ мм}^2$ и удельное сопротивление меди составляет $0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$. На клеммы подали напряжение 5 В. Найдите силу тока, ответ представьте в А, результат округлите до целого.

Решение:

1. Клеммы делят проволоку на две части $5x$ и $3x$. Суммарно, проволока состоит из 8-ми одинаковых отрезков $5x + 3x = 8x$, где x – сопротивление $1/8$ отрезка проволоки $x = r l / 8s$, где r удельное сопротивление меди, l – длина проволоки, s – площадь



поперечного сечения.

2. После формирования петли, на проволоке образуется 3 отрезка с различными сопротивлениями: $4x$ – отрезок до места спайки, $3x$ и $1x$ – отрезки на петле. Полученные отрезки можно представить в виде резисторов с сопротивлениями: $4x$, $3x$ и $1x$.
3. Эти сопротивления образуют схему в виде последовательного подключения куска $4x$ с параллельно соединенными кусками $3x$ и x .
Общее сопротивление проволоки $R_{\text{общ}} = 4x + 3x / (1 + 3) = 4,75x$
Поставим x , получим $R_{\text{общ}} = 4,75 r l / 8s$
4. По закону Ома сила тока равна $I = U / R = 8 U s / 4,75 r l = 120,3 \text{ А}$

Ответ: 120А

Вариант 2.1

Клеммы источника тока подключили к концу медной проволоки и на некотором расстоянии от первой клеммы, так чтобы длина всей проволоки делилась на два отрезка в отношении 5:3. Свободный конец медной проволоки припаяли к середине этой проволоки, так что образовалась петля. Известно, что длина проволоки равна 80 см, площадь поперечного сечения $0,4 \text{ мм}^2$ и удельное сопротивление меди составляет $0,0175 \text{ Ом} \cdot \text{мм}^2/\text{м}$. Через клеммы проходит ток равный 100 А. Найдите напряжение, подаваемое на клеммы. Ответ представьте в В, результат округлите до целого.

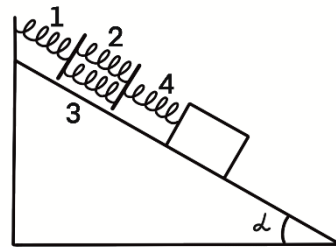
$$I = 8 U s / 4,75 r l$$

$$U = 4,75 r l I / 8 s = 2,078 \text{ В} = 2 \text{ В}$$

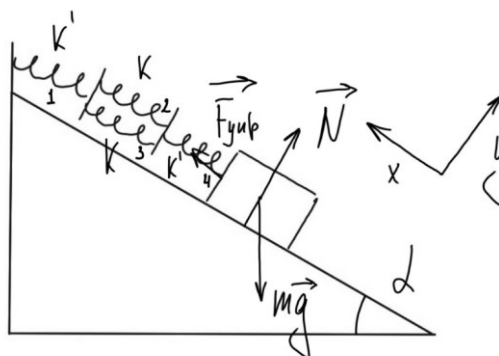
Ответ: 2В

Задача**Пружинные системы и наклонная плоскость****Вариант 1.1**

На гладкой наклонной плоскости расположен брусок массой $m = 2$ кг, прикрепленный к конструкции пружин (см. рисунок), состоящей из пружин с жёсткостями $k' = 300$ Н/м для 1 и 4 пружин и $k = 100$ Н/м для 2 и 3 пружин. Найти удлинение пружины под цифрой 2. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Все пружины растягиваются параллельно поверхности наклонной плоскости. Пружины 2 и 3 в свободном состоянии имеют одинаковую длину.



Решение:



По второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Распишем силы, действующие на брусок. Это сила тяжести, сила реакции опоры, сила упругости со стороны системы пружин:

$$\vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (2)$$

И спроецируем эти силы на оси, ориентированные вдоль (ось x) и перпендикулярно (ось y) поверхности:

$$Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$Ox: F_{упр} - mg \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

Сила упругости будет определяться как общее растяжение пружины $x_{общ}$, умноженное на общий коэффициент жесткости системы пружин:

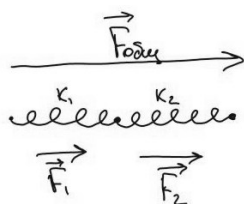
$$F_{упр} = k_{общ} x_{общ} \quad (5)$$

Выразим общее растяжение, используя уравнения проекций:

$$x_{общ} = \frac{mg \sin \alpha}{k_{общ}} \quad (6)$$

Теперь определим, как зависит растяжение каждой пружины и коэффициент жесткости в зависимости от параллельного и последовательного соединения пружин.

В случае последовательного соединения:



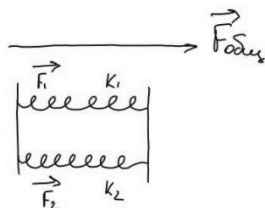
$$\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2 \quad (7)$$

$$x = x_1 + x_2 \quad (8)$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (10)$$

В случае параллельного:



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (11)$$

$$x = x_1 = x_2 \quad (12)$$

$$kx = k_1x_1 + k_2x_2 \quad (13)$$

$$k = k_1 + k_2 \quad (14)$$

Определим общее растяжение системы пружин. Общее растяжение будет определяться, как сумма растяжений последовательно соединенных пружин (у параллельно соединенных пружин 2 и 3 растяжение будет одинаковым – обозначим его за x):

$$x_{\text{общ}} = x' + x + x' = 2x' + x \quad (15)$$

Для каждой части конструкции пружин соединенных последовательно силы растяжения будут одинаковыми. Обозначим за F' силу для первой пружины, а суммарную силу для 2 и 3 обозначим за F :

$$F' = F \quad (16)$$

Распишем эти силы. Учитывая, что коэффициент жесткости для параллельно соединенных пружин 2 и 3 определяется как:

$$k_{23} = k_2 + k_3 = 2k \quad (17)$$

Для расписанных сил F' и F получим:

$$k'x' = 2kx \quad (18)$$

Тогда из (18) выразим x' и подставим в (15), чтобы получить общее растяжение

$$x_{\text{общ}} = 2 \frac{2kx}{k'} + x = x \left(4 \frac{k}{k'} + 1 \right) \quad (19)$$

И растяжение пружины 2 будет определяться как

$$x = \frac{x_{\text{общ}}}{4 \frac{k}{k'} + 1} \quad (20)$$

Найдём жесткость системы пружин:

$$\frac{1}{k_{\text{общ}}} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{k'} \quad (21)$$

Получаем:

$$k_{\text{общ}} = \frac{2kk'}{4k + k'} \quad (22)$$

Собираем уравнения (6) (20) и (22) вместе. Получаем, что растяжение пружины выражается:

$$x = \frac{mg \sin \alpha (4k + k')k'}{(4k + k')2kk'} = \frac{mg \sin \alpha}{2k} \quad (23)$$

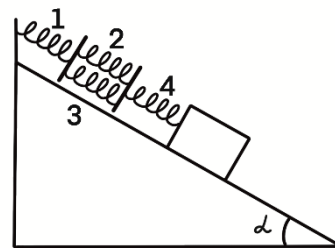
Уравнение (23) можно было получить и проще, если в уравнениях (5) и (6) за $F_{\text{упр}}$ принять силу действующую на участок состоящий из 2 и 3 пружины параллельно, что возможно так как эта сила равна общей силе упругости системы пружин соединенных последовательно. Тогда в (6) в качестве $x_{\text{общ}}$ использовалось бы искомое растяжение – x , а в качестве $k_{\text{общ}}$ нужно было бы использовать жесткость этого участка $k_{23} = 2k$.

Подставляя данные из условия задачи в (23), получаем $x=0,05$ м

Ответ: 0,05 м

Вариант 1.2

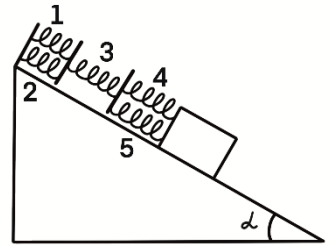
На гладкой наклонной плоскости расположен брусок массой $m = 1$ кг, прикрепленный к конструкции пружин (см. рисунок), состоящей из пружин с жёсткостями $k' = 400$ Н/м для 1 и 4 пружин и $k = 200$ Н/м для 2 и 3 пружин. Найти удлинение пружины под цифрой 3. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Все пружины растягиваются параллельно поверхности наклонной плоскости. Пружины 2 и 3 в свободном состоянии имеют одинаковую длину.



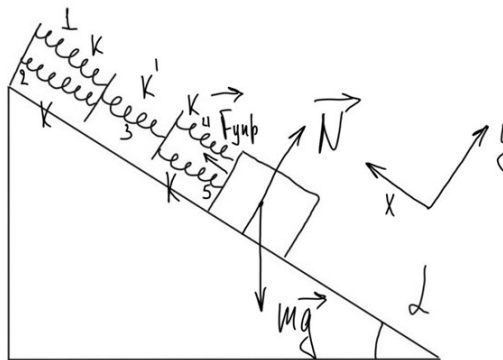
Ответ: 0,0125 м.

Вариант 2.1

На гладкой наклонной плоскости расположен брусок массой $m = 2$ кг, прикрепленный к конструкции пружин (см. рисунок), состоящей из пружин с жёсткостями $k' = 300$ Н/м для 3 пружины и $k = 100$ Н/м для всех других пружин. Найти удлинение пружины под цифрой 4. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Все пружины растягиваются параллельно поверхности наклонной плоскости.



Решение:



По второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

Распишем силы, действующие на брусок. Это сила тяжести, сила реакции опоры, сила упругости со стороны системы пружин:

$$\vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (2)$$

И спроецируем эти силы на оси, ориентированные вдоль (ось x) и перпендикулярно (ось y) поверхности:

$$Oy: N - mg \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$Ox: F_{\text{упр}} - mg \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

Сила упругости будет определяться как общее растяжение пружины $x_{\text{общ}}$, умноженное на общий коэффициент жесткости системы пружин:

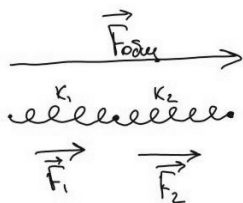
$$F_{\text{упр}} = k_{\text{общ}} x_{\text{общ}} \quad (5)$$

Выразим общее растяжение, используя уравнения проекций:

$$x_{\text{общ}} = \frac{mg \sin \alpha}{k_{\text{общ}}} \quad (6)$$

Теперь определим, как зависит растяжение каждой пружины и коэффициент жесткости в зависимости от параллельного и последовательного соединения пружин.

В случае последовательного соединения:



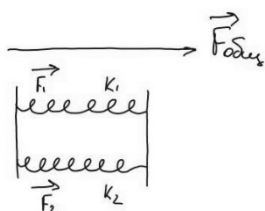
$$\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2 \quad (7)$$

$$x = x_1 + x_2 \quad (8)$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (10)$$

В случае параллельного:



$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (11)$$

$$x = x_1 = x_2 \quad (12)$$

$$kx = k_1x_1 + k_2x_2 \quad (13)$$

$$k = k_1 + k_2 \quad (14)$$

Определим общее растяжение системы пружин. Оно будет определяться, как сумма растяжений последовательно соединенных пружин (для участка параллельно соединенных пружин 1 и 2 растяжение будет одинаковым – обозначим его за x , такое же растяжение будет для 4 и 5 потому что жесткости этих пружин одинаковые, а для третьей пружины обозначим растяжение за x' .

$$x_{\text{общ}} = x + x' + x \quad (15)$$

Для каждой части конструкции пружин соединенных последовательно силы растяжения будут одинаковыми. Обозначим за F' силу для третьей пружины, а суммарную силу для 4 и 5 обозначим за F :

$$F' = F \quad (16)$$

Распишем эти силы. Учитывая, что коэффициент жесткости для параллельно соединенных пружин 4 и 5 определяется как:

$$k_{45} = k_4 + k_5 = 2k \quad (17)$$

Для расписанных сил F' и F получим:

$$k'x' = 2kx \quad (18)$$

Тогда из (18) выразим x' и подставим в (15), чтобы получить общее растяжение

$$x_{\text{общ}} = \frac{2kx}{k'} + 2x = 2x \left(\frac{k}{k'} + 1 \right) \quad (19)$$

И растяжение пружины 2 будет определяться как

$$x = \frac{x_{\text{общ}}}{2 \left(\frac{k}{k'} + 1 \right)} \quad (20)$$

Найдём жесткость системы пружин:

$$\frac{1}{k_{\text{общ}}} = \frac{1}{k + k} + \frac{1}{k'} + \frac{1}{k + k} \quad (21)$$

Получаем:

$$k_{\text{общ}} = \frac{kk'}{k + k'} \quad (22)$$

Собираем уравнения (6) (20) и (22) вместе. Получаем, что растяжение пружины выражается:

$$x = \frac{mg \sin \alpha (k + k') k'}{(k + k') 2kk'} = \frac{mg \sin \alpha}{2k} \quad (23)$$

Уравнение (23) можно было получить и другим способом, если в уравнениях (5) и (6) за $F_{\text{уп}}$ принять силу действующую на участок состоящий из 4 и 5 пружины параллельно, что возможно так как эта сила равна общей силе упругости системы пружин соединенных последовательно. Тогда в (6) в качестве $x_{\text{общ}}$ использовалось бы искомое растяжение – x , а в качестве $k_{\text{общ}}$ нужно было бы использовать жесткость этого участка $k_{45} = 2k$.

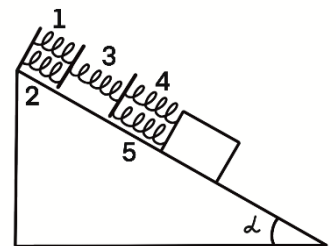
Подставляя данные из условия задачи, получаем $x = 0,05$ м

Ответ: $x = 0,05$ м.

Вариант 2.2

На гладкой наклонной плоскости расположен брусок массой $m = 1$ кг, прикрепленный к конструкции пружин (см. рисунок), состоящей из пружин с жесткостями $k' = 400$ Н/м для 3 пружины и $k = 200$ Н/м для всех других пружин. Найти удлинение пружины под цифрой 3. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с². Все пружины растягиваются параллельно поверхности наклонной плоскости. Пружины 1, 2, 4 и 5 в свободном состоянии имеют одинаковую длину.

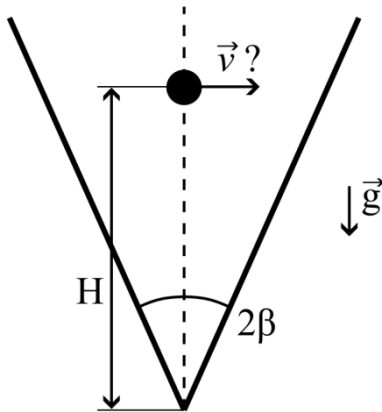
Ответ: $x = 0,0125$ м.



Задача

Вариант 1:

Две плоскости образуют V-образный клин с углом раствора 2β , внутри которого, между стенками клина, в поле сил тяжести упруго прыгает мячик (см. рисунок). При этом, мячик летает по одной и той же траектории от стенки до стенки. Чему равна скорость мячика в наивысшей точке траектории, если расстояние до ребра клина в этот момент равно H ? Ускорение свободного падения равно g , размерами и вращением мячика можно пренебречь.



Решение: Рассмотрим кинематику движения мячика после отскока от левой стороны клина. Из геометрии получаем, что начальная скорость мячика направлена под углом β к горизонту. Координаты мячика будут меняться во времени как:

$$x(t) = v_x t, \quad v_x = \text{const}$$

$$y(t) = H - h + v_{y,0} t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{y,0} - gt$$

где h - высота подъема над уровнем точки, в которой мячик соударяется со стороной клина, $v_{y,0}$ - вертикальная составляющая скорости в момент отскока от стороны клина.

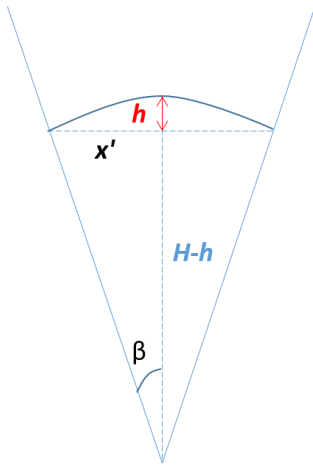
Для нее выполняется соотношение:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \operatorname{tg}(\beta)$$

Рассматриваем момент времени t' , когда мячик находится в высшей точке своей траектории. Вертикальная составляющая скорости в этот момент равна нулю, откуда получим:

$$t' = \frac{v_{y,0}}{g}, \quad y(t') = H \Rightarrow h = \frac{2v_{y,0}^2}{g}, \quad x(t') = \frac{v_x v_{y,0}}{g}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник, один катет которого горизонтальный отрезок длиной $x(t')$, построенный из точки отскока мячика, а другой - вертикальный отрезок длиной $y(0) = H - h$, построенный из ребра клина.



По условию угол при втором катете равен β , и тогда:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{x(t')}{H-h} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H-h)}$$

Приравнивая к тангенсу, выраженному через отношение компонент начальной скорости, получим:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H-h)} \Rightarrow v_x^2 = g(H-h)$$

С другой стороны, используя то же отношение, получим:

$$h = \frac{2v_{y,0}^2}{g} = \frac{2v_x^2}{g} \operatorname{tg}(\beta)$$

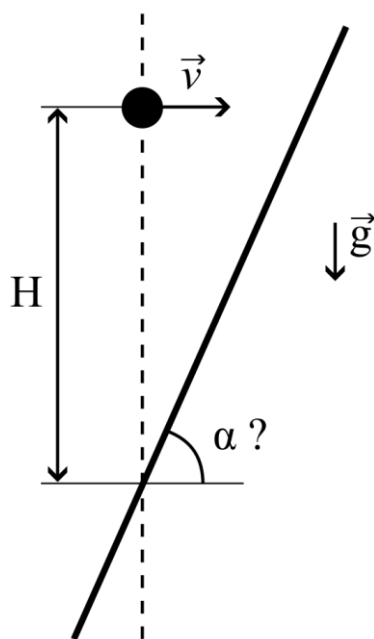
Объединяя последние два соотношения, получаем:

$$v_x^2 = g \left(H - \frac{2v_x^2}{g} \operatorname{tg}(\beta) \right) \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{gH}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\beta)}}$$

Вариант 2:

Мячик бросают в сторону наклонной плоскости из точки, расположенной на высоте H над точкой пересечения этой плоскости и горизонтальной поверхности (см. рисунок).

Начальная скорость шарика равна v и направлена горизонтально. Упруго отскочив от плоскости, мячик по той же траектории вернулся в исходную точку. Определите угол наклона плоскости над горизонталью. Ускорение свободного падения равно g , размерами и вращением мячика можно пренебречь.



Решение:

Рассмотрим кинематику движения мячика после отскока от плоскости. Из геометрии получаем, что начальная скорость мячика направлена под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ к горизонту. Координаты мячика будут меняться во времени как:

$$x(t) = -v_x t, \quad v_x = v = \text{const}$$

$$y(t) = H - h + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{y,0} - gt$$

где h - высота подъема над уровнем точки, в которой мячик соударяется с плоскостью, $v_{y,0}$ - вертикальная составляющая скорости в момент отскока. Для нее выполняется соотношение:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \text{tg}(\beta) = \text{ctg}(\alpha)$$

Рассматриваем момент времени t' , когда мячик вернулся в начальную точку.

Вертикальная составляющая скорости в этот момент равна нулю, откуда получим:

$$t' = \frac{v_{y,0}}{g}, \quad y(t') = H \Rightarrow v_{y,0} = \sqrt{2gh}, \quad x(t') = -\frac{v_x v_{y,0}}{g}$$

Откуда

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{1}{v_x} \sqrt{2gh}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник, один катет которого горизонтальный отрезок длиной $x(t')$, построенный из точки отскока мячика, а другой - вертикальный отрезок длиной $y(0) = H - h$, построенный от конца горизонтального отрезка (который

соответствует начальной x координате) вниз до плоскости. По условию угол при втором катете равен β , и тогда:

$$ctg(\alpha) = tg(\beta) = \frac{|x(t')|}{H - h} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H - h)}$$

Приравнявая к котангенсу, выраженному через отношение компонент начальной скорости, получим:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H - h)} \Rightarrow h = H - \frac{v_x^2}{g}$$

Подставляя в выражение для котангенса, получаем (с учётом $v_x = v$)

$$ctg(\alpha) = \sqrt{\frac{gH}{2v^2} - \frac{1}{2}}$$

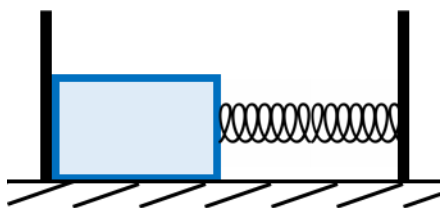
Или угол

$$\alpha = arcctg\left(\sqrt{2\left(\frac{gH}{v^2} - 1\right)}\right)$$

Задача

Вариант 1

Брусек массой m , лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности, одной своей гранью касается вертикального бортика, а другой прикреплен к стене пружиной жесткостью k (см. рисунок). Изначально пружина не деформирована. Затем брусек отвели на некоторое расстояние вправо и отпустили. Определите первоначальное отклонение бруска, если брусек до полной остановки ударился о левый борт $n > 0$ раз, перед остановкой двигался по направлению от бортика, а в результате выделилось количество теплоты Q . Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ , ускорение свободного падения g . Брусек ударяется о борт абсолютно упруго.



Решение:

После того, как брусек отпустили, он будет совершать колебательное движение с сухим трением. Сила трения будет постоянна по модулю (и равна μmg), но будет менять направление при изменении направления движения. При соударении о борт величина скорости будет оставаться постоянной, но будет менять направление.

Обозначим на координатной оси начальное положение бруска за 0. В области координат $x \in (0, \frac{\mu mg}{k})$ сила натяжения будет меньше силы трения скольжения, поэтому, если в какой-то момент скорость бруска будет равна нулю в этой области, то он прекратит движение – сила натяжения будет скомпенсирована силой трения покоя.

Будем рассматривать моменты поворота бруска вдали от левого бортика. Обозначим две таких последовательных точки поворота как x_n и x_{n+1} . В них кинетическая энергия бруска будет равна нулю, а разница в энергиях натяжения пружины будет равна работе силы трения. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_n^2}{2} - \frac{kx_{n+1}^2}{2} = \mu mg(x_n + x_{n+1}) \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{2\mu mg}{k}$$

При каждом проходе бруска величина отклонения от первоначального положения уменьшается на одну и ту же величину. Поэтому, для данного начального отклонения можно определить точку последнего поворота, где брусек и остановится:

$$x_n = x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k},$$

Число n равно данному по условию количеству соударений бруска о левый борт. Эта точка может отличаться от положения равновесия. В итоге в системе останется некоторое

количество энергии, запасенное в растянутой пружине. Разница начальной и конечной энергий натяжения пружины и есть выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_n^2}{2} = \frac{k}{2}(x_0^2 - x_n^2) = \frac{k}{2}\left(x_0 - x_0 + n \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right)\left(x_0 + x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right) \\ = 2(n \cdot \mu mg)\left(x_0 - n \cdot \frac{\mu mg}{k}\right)$$

Откуда первоначальное натяжение найдется как:

$$\frac{Q}{2(n \cdot \mu mg)} + n \cdot \frac{\mu mg}{k} = x_0$$

Вариант 2

Брусек массой m , лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности, одной своей гранью касается вертикального бортика, а другой прикреплен к стене пружиной жесткостью k (см. рисунок). Изначально пружина не деформирована. Затем брусок отвели на некоторое расстояние вправо и отпустили. Определите первоначальное отклонение бруска, если брусок до полной остановки ударился о левый борт $n > 0$ раз, перед остановкой двигался по направлению к бортику, а в результате выделилось количество теплоты Q . Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ , ускорение свободного падения g . Брусок ударяется о борт абсолютно упруго.

Решение:

Аналогично Варианту 1, точка последнего поворота найдется как:

$$x_n = x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k},$$

После последнего поворота брусок пройдет еще некоторое расстояние Δx . Обозначим конечную координату бруска как x' . Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_n^2}{2} = \frac{kx'^2}{2} + \mu mg(x_n - x') \Rightarrow x' = \frac{2\mu mg}{k}(n + 1) - x_0$$

Выделившееся количество теплоты

В итоге в системе останется некоторое количество энергии, запасенное в растянутой пружине. Разница начальной и конечной энергий натяжения пружины и есть выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx'^2}{2} = \frac{k}{2}(x_0^2 - x'^2) = \frac{k}{2}\left(x_0 - x_0 + (n + 1) \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right)\left(x_0 + x_0 + (n + 1) \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right) \\ = 2(n + 1) \cdot \mu mg\left(x_0 - (n + 1) \cdot \frac{\mu mg}{k}\right)$$

Откуда:

$$\frac{Q}{2(n + 1) \cdot \mu mg} + (n + 1) \cdot \frac{\mu mg}{k} = x_0$$