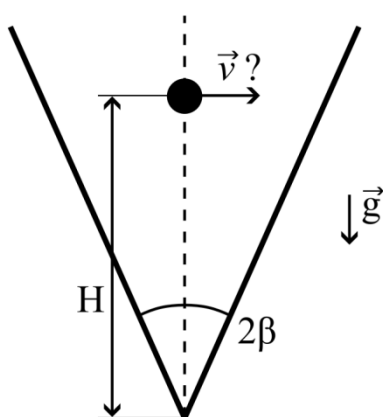


Задания заключительного этапа Олимпиады школьников СПбГУ по физике 2024-2025 гг.

Задача

Вариант 1:

Две плоскости образуют V-образный клин с углом раствора 2β , внутри которого, между стенками клина, в поле сил тяжести упруго прыгает мячик (см. рисунок). При этом, мячик летает по одной и той же траектории от стенки до стенки. Чему равна скорость мячика в наивысшей точке траектории, если расстояние до ребра клина в этот момент равно H ? Ускорение свободного падения равно g , размерами и вращением мячика можно пренебречь.



Решение: Рассмотрим кинематику движения мячика после отскока от левой стороны клина. Из геометрии получаем, что начальная скорость мячика направлена под углом β к горизонту. Координаты мячика будут меняться во времени как:

$$x(t) = v_x t, \quad v_x = \text{const}$$

$$y(t) = H - h + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{y,0} - gt$$

где h - высота подъема над уровнем точки, в которой мячик соударяется со стороной клина, $v_{y,0}$ - вертикальная составляющая скорости в момент отскока от стороны клина.

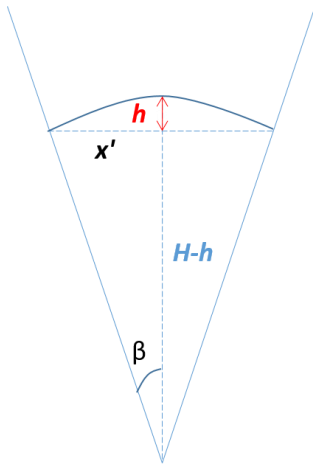
Для нее выполняется соотношение:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \tan(\beta)$$

Рассматриваем момент времени t' , когда мячик находится в высшей точке своей траектории. Вертикальная составляющая скорости в этот момент равна нулю, откуда получим:

$$t' = \frac{v_{y,0}}{g}, \quad y(t') = H \Rightarrow h = \frac{2v_{y,0}^2}{g}, \quad x(t') = \frac{v_x v_{y,0}}{g}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник, один катет которого горизонтальный отрезок длиной $x(t')$, построенный из точки отскока мячика, а другой - вертикальный отрезок длиной $y(0) = H - h$, построенный из ребра клина.



По условию угол при втором катете равен β , и тогда:

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{x(t')}{H-h} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H-h)}$$

Приравнявая к тангенсу, выраженному через отношение компонент начальной скорости, получим:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H-h)} \Rightarrow v_x^2 = g(H-h)$$

С другой стороны, используя то же отношение, получим:

$$h = \frac{2v_{y,0}^2}{g} = \frac{2v_x^2}{g} \operatorname{tg}(\beta)$$

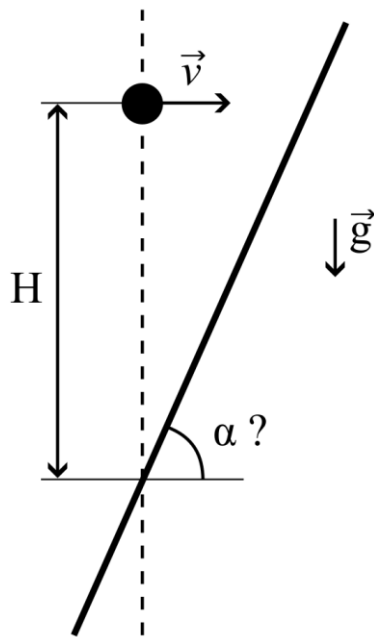
Объединяя последние два соотношения, получаем:

$$v_x^2 = g \left(H - \frac{2v_x^2}{g} \operatorname{tg}(\beta) \right) \Rightarrow v_x = \sqrt{\frac{gH}{1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(\beta)}}$$

Вариант 2:

Мячик бросают в сторону наклонной плоскости из точки, расположенной на высоте H над точкой пересечения этой плоскости и горизонтальной поверхности (см. рисунок).

Начальная скорость шарика равна v и направлена горизонтально. Упруго отскочив от плоскости, мячик по той же траектории вернулся в исходную точку. Определите угол наклона плоскости над горизонталью. Ускорение свободного падения равно g , размерами и вращением мячика можно пренебречь.



Решение:

Рассмотрим кинематику движения мячика после отскока от плоскости. Из геометрии получаем, что начальная скорость мячика направлена под углом $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ к горизонту. Координаты мячика будут меняться во времени как:

$$x(t) = -v_x t, \quad v_x = v = \text{const}$$

$$y(t) = H - h + v_{y,0}t - \frac{gt^2}{2}, \quad v_y(t) = v_{y,0} - gt$$

где h - высота подъема над уровнем точки, в которой мячик соударяется с плоскостью, $v_{y,0}$ - вертикальная составляющая скорости в момент отскока. Для нее выполняется соотношение:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \text{tg}(\beta) = \text{ctg}(\alpha)$$

Рассматриваем момент времени t' , когда мячик вернулся в начальную точку.

Вертикальная составляющая скорости в этот момент равна нулю, откуда получим:

$$t' = \frac{v_{y,0}}{g}, \quad y(t') = H \Rightarrow v_{y,0} = \sqrt{2gh}, \quad x(t') = -\frac{v_x v_{y,0}}{g}$$

Откуда

$$\text{ctg}(\alpha) = \frac{1}{v_x} \sqrt{2gh}$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник, один катет которого горизонтальный отрезок длиной $x(t')$, построенный из точки отскока мячика, а другой - вертикальный отрезок длиной $y(0) = H - h$, построенный от конца горизонтального отрезка (который

соответствует начальной x координате) вниз до плоскости. По условию угол при втором катете равен β , и тогда:

$$ctg(\alpha) = tg(\beta) = \frac{|x(t')|}{H - h} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H - h)}$$

Приравнивая к котангенсу, выраженному через отношение компонент начальной скорости, получим:

$$\frac{v_{y,0}}{v_x} = \frac{v_x v_{y,0}}{g(H - h)} \Rightarrow h = H - \frac{v_x^2}{g}$$

Подставляя в выражение для котангенса, получаем (с учётом $v_x = v$)

$$ctg(\alpha) = \sqrt{\frac{gH}{2v^2} - \frac{1}{2}}$$

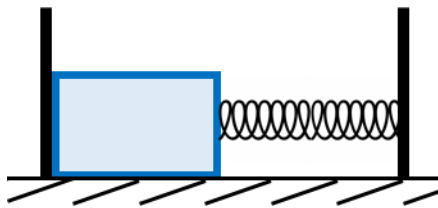
Или угол

$$\alpha = arcctg\left(\sqrt{2\left(\frac{gH}{v^2} - 1\right)}\right)$$

Задача

Вариант 1

Брусек массой m , лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности, одной своей гранью касается вертикального бортика, а другой прикреплен к стене пружиной жесткостью k (см. рисунок). Изначально пружина не деформирована. Затем брусек отвели на некоторое расстояние вправо и отпустили. Определите первоначальное отклонение бруска, если брусек до полной остановки ударился о левый борт $n > 0$ раз, перед остановкой двигался по направлению от бортика, а в результате выделилось количество теплоты Q . Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ , ускорение свободного падения g . Брусек ударяется о борт абсолютно упруго.



Решение:

После того, как брусек отпустили, он будет совершать колебательное движение с сухим трением. Сила трения будет постоянна по модулю (и равна μmg), но будет менять направление при изменении направления движения. При соударении о борт величина скорости будет оставаться постоянной, но будет менять направление.

Обозначим на координатной оси начальное положение бруска за 0. В области координат $x \in (0, \frac{\mu mg}{k})$ сила натяжения будет меньше силы трения скольжения, поэтому, если в какой-то момент скорость бруска будет равна нулю в этой области, то он прекратит движение – сила натяжения будет скомпенсирована силой трения покоя.

Будем рассматривать моменты поворота бруска вдали от левого бортика. Обозначим две таких последовательных точки поворота как x_n и x_{n+1} . В них кинетическая энергия бруска будет равна нулю, а разница в энергиях натяжения пружины будет равна работе силы трения. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_n^2}{2} - \frac{kx_{n+1}^2}{2} = \mu mg(x_n + x_{n+1}) \Rightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{2\mu mg}{k}$$

При каждом проходе бруска величина отклонения от первоначального положения уменьшается на одну и ту же величину. Поэтому, для данного начального отклонения можно определить точку последнего поворота, где брусек и остановится:

$$x_n = x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k},$$

Число n равно данному по условию количеству соударений бруска о левый борт. Эта точка может отличаться от положения равновесия. В итоге в системе останется некоторое

количество энергии, запасенное в растянутой пружине. Разница начальной и конечной энергий натяжения пружины и есть выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx_n^2}{2} = \frac{k}{2}(x_0^2 - x_n^2) = \frac{k}{2}\left(x_0 - x_0 + n \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right)\left(x_0 + x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right) \\ = 2(n \cdot \mu mg)\left(x_0 - n \cdot \frac{\mu mg}{k}\right)$$

Откуда первоначальное натяжение найдется как:

$$\frac{Q}{2(n \cdot \mu mg)} + n \cdot \frac{\mu mg}{k} = x_0$$

Вариант 2

Брусек массой m , лежащий на горизонтальной шероховатой поверхности, одной своей гранью касается вертикального бортика, а другой прикреплен к стене пружиной жесткостью k (см. рисунок). Изначально пружина не деформирована. Затем брусок отвели на некоторое расстояние вправо и отпустили. Определите первоначальное отклонение бруска, если брусок до полной остановки ударился о левый борт $n > 0$ раз, перед остановкой двигался по направлению к бортику, а в результате выделилось количество теплоты Q . Коэффициент трения бруска о поверхность равен μ , ускорение свободного падения g . Брусок ударяется о борт абсолютно упруго.

Решение:

Аналогично Варианту 1, точка последнего поворота найдется как:

$$x_n = x_0 - n \cdot \frac{2\mu mg}{k},$$

После последнего поворота брусок пройдет еще некоторое расстояние Δx . Обозначим конечную координату бруска как x' . Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_n^2}{2} = \frac{kx'^2}{2} + \mu mg(x_n - x') \Rightarrow x' = \frac{2\mu mg}{k}(n + 1) - x_0$$

Выделившееся количество теплоты

В итоге в системе останется некоторое количество энергии, запасенное в растянутой пружине. Разница начальной и конечной энергий натяжения пружины и есть выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{kx_0^2}{2} - \frac{kx'^2}{2} = \frac{k}{2}(x_0^2 - x'^2) = \frac{k}{2}\left(x_0 - x_0 + (n + 1) \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right)\left(x_0 + x_0 - (n + 1) \cdot \frac{2\mu mg}{k}\right) \\ = 2(n + 1) \cdot \mu mg\left(x_0 - (n + 1) \cdot \frac{\mu mg}{k}\right)$$

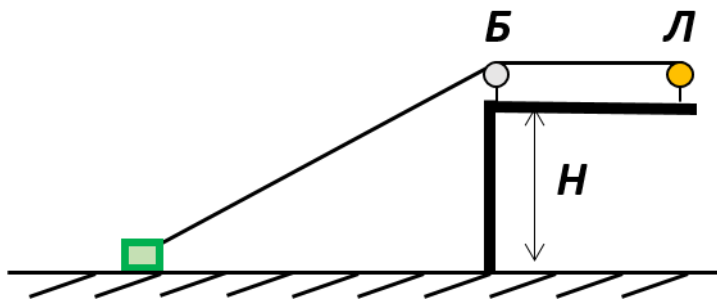
Откуда:

$$\frac{Q}{2(n + 1) \cdot \mu mg} + (n + 1) \cdot \frac{\mu mg}{k} = x_0$$

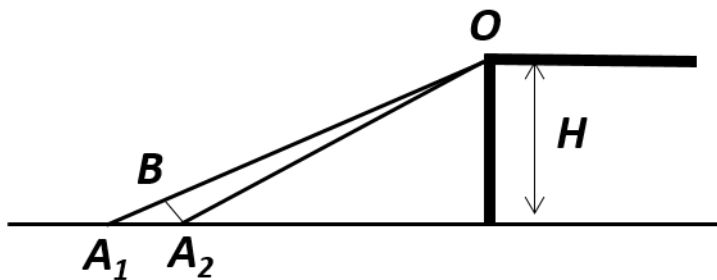
Задача

Вариант 1

Груз массой M тянут по дну карьера глубиной H при помощи лебедки (Л) и троса, перекинутого через блок (Б) (см. рисунок). Лебедка радиусом $r_0 \ll H$ вращается с постоянной угловой скоростью ω . Определите длину участка троса от груза до блока в момент отрыва груза от земли. Коэффициент трения груза о дно карьера μ , трос не провисает, начальная длина участка троса от груза до блока L_0 . Трением в лебедке и блоке, а также размерами груза и блока пренебрегите.



Решение:



Поскольку лебедка вращается с постоянной угловой скоростью, то длина участка троса от груза до блока будет уменьшаться с постоянной скоростью. Поэтому можно записать:

$$L(t) = L_0 - \omega r_0 t$$

где L_0 – длина троса в некоторый произвольный момент начала наблюдения (до отрыва). Найдем, как со временем будет меняться скорость груза $v(t)$. Обозначив угол между тросом и горизонталью как α , запишем:

$$\sin \alpha = \frac{H}{L_0 - \omega r_0 t}, \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{H^2}{(L_0 - \omega r_0 t)^2}}$$

Рассмотрим некоторый малый промежуток времени $(t, t + \Delta t)$. Δt выберем столь малым, что скорость груза можно считать неизменной. За это время груз пройдет отрезок A_1A_2 , длина которого будет равна $v(t)\Delta t$. Отложим на отрезке OA_1 отрезок OA_2 . Длина A_1B будет равна тому, на сколько за это время укоротился участок троса от груза до блока, то есть $\omega r_0 \Delta t$. Ввиду малости интервала времени Δt угол A_1OA_2 будет близок к нулю, а из-за

равенства сторон этого треугольника отрезок A_2B можно считать перпендикуляром к OA_1 . Тогда треугольник A_1BA_2 – прямоугольный, и в нем:

$$A_1B = A_1A_2 \cos \alpha \Rightarrow \omega r_0 \Delta t = v(t) \Delta t \sqrt{1 - \frac{H^2}{(L_0 - \omega r_0 t)^2}}$$

Откуда находим:

$$v(t) = \frac{\omega r_0 (L_0 - \omega r_0 t)}{\sqrt{(L_0 - \omega r_0 t)^2 - H^2}}$$

Отсюда можем найти ускорение груза как производную этой величины по времени. После преобразований имеем:

$$a(t) = \frac{\omega^2 r_0^2 H^2}{[(L_0 - \omega r_0 t)^2 - H^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Величина $L_0 - \omega r_0 t$ есть искомая длина участка троса в момент отрыва, обозначим ее за L_x .

$$a(t) = \frac{\omega^2 r_0^2 H^2}{[L_x^2 - H^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Запишем проекции второго закона Ньютона на горизонтальную и вертикальную оси:

$$\begin{cases} mg = T \sin \alpha + N \\ ma = T \cos \alpha - \mu N \end{cases}$$

где N – сила реакции опоры. В момент отрыва t_0 она равна нулю. Подставив полученное выражение для ускорения и разделив первое уравнение системы на второе, получим уравнение L_x :

$$g = \frac{\omega^2 r_0^2 H^3}{[L_x^2 - H^2]^2}$$

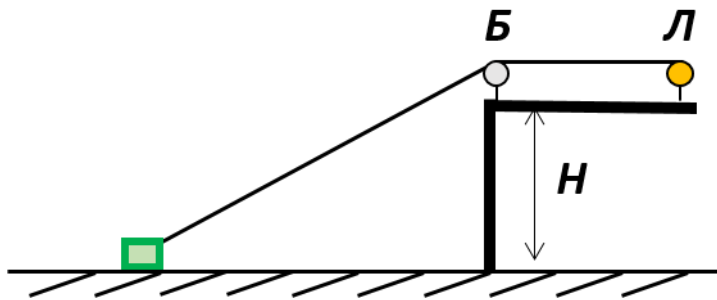
Откуда выразим L_x :

$$L_x = \sqrt{H^2 + \omega r_0 H \sqrt{\frac{H}{g}}}$$

Вариант 2

Груз массой M тянут по дну карьера глубиной H при помощи лебедки (Л) и троса, перекинутого через блок (Б) (см. рисунок). Лебедка радиусом $r_0 \ll H$ вращается с некоторой постоянной угловой скоростью. В момент, когда груз находился на расстоянии $2H$ от края карьера, он оторвался от земли. Определите частоту вращения лебедки.

Коэффициент трения груза о дно карьера μ , трос не провисает, начальная длина участка троса от груза до блока L_0 . Трением в лебедке и блоке, а также размерами груза и блока пренебрегите.



Решение:

В ходе аналогичных рассуждений получаем длину участка троса от груза до блока:

$$L_x = \sqrt{H^2 + \omega r_0 H \sqrt{\frac{H}{g}}}$$

С другой стороны, по прямоугольному треугольнику из условия имеем:

$$L_x^2 = H^2 + 4H^2 = 5H^2 \Rightarrow L_x = H\sqrt{5}$$

И тогда:

$$4 \frac{\sqrt{Hg}}{r_0} = \omega$$

Задача

Вариант 1:

В открытый космос под солнечные лучи поместили шарик – тонкую сферическую оболочку из специфического материала, заполненную идеальным газом. В начальный момент времени радиус шарика был R_0 , а температура T_0 . До какого радиуса R надуется шарик под действием солнечных лучей, если шарик расположен на расстоянии $L \gg R_c$ от Солнца, где R_c – радиус Солнца. Мощность излучения солнца равна W_0 . Другими источниками излучения можно пренебречь.

Информация о материале оболочки:

- * Коэффициент серости равен единице (поглощается всё падающее излучение).
- * Теплопроводность достаточно большая, что можно считать, что температура на всей поверхности одинакова.
- * Если растягивать круглый лоскут из этого материала равномерно во все стороны (только в плоскости этого лоскута), то, в определённом диапазоне растяжений, линейная плотность упругой силы будет пропорциональна радиусу лоскута: $f = k r/r_0$, где k - неизвестный коэффициент, r_0 - радиус лоскута в нерастянутом состоянии. Считайте, что растяжение сферической оболочки попадает в этот диапазон как в начальном, так и в нагретом состоянии.

Примечание:

* Мощность (в Вт), излучаемая с поверхности оболочки с единичным коэффициентом серости определяется законом Стефана-Больцмана:

$$W_{\text{изл}} = S\sigma T^4$$

где $S = 4\pi R^2$ - площадь поверхности оболочки, σ - постоянная Стефана-Больцмана.

Решение:

На оболочку попадает излучение Солнца, которое нагревает её. С другой стороны, оболочка также излучает, за счёт чего с ней отводится тепловая энергия. При определённой температуре наступит равновесие.

Найдём мощность теплового нагрева оболочки за счёт излучения Солнца. Если бы сферическая оболочка была бы окружена некоторой внешней оболочкой при температуре T , то равновесие наступило бы, когда оболочка нагрелась бы до этой же температуры. Мощность, излучаемая с поверхности оболочки с единичным коэффициентом серости можно найти из закона Стефана-Больцмана:

$$W_{\text{изл}} = S\sigma T^4$$

где $S = 4\pi R^2$ - площадь поверхности оболочки, σ - постоянная Стефана-Больцмана. В равновесии мощность поглощаемого излучения такая же. Получается, что с внешней оболочки, которая занимает полный телесный угол 4π , приходит излучение

$$W_{\text{погл}} = W_{\text{изл}}$$

При этом, ввиду сферической симметрии оболочки, с каждого направления на неё приходит одинаковое количество энергии. Поэтому, если бы вместо полного телесного угла внешняя оболочка занимала бы лишь угол Ω , мощность поглощаемого излучения была бы в $\Omega/(4\pi)$ раз меньше. Эти рассуждения позволяют вычислить мощность нагрева из-за излучения Солнца:

$$W_{\text{погл}} = \frac{\Omega}{4\pi} S \sigma T_c^4 = \Omega R^2 \sigma T_c^4$$

Откуда температура сферической оболочки выражается как

$$T = \left(\frac{\Omega}{4\pi} \right)^{\frac{1}{4}} T_c$$

Теперь найдём, до каких размеров увеличится оболочка при данной температуре. Для идеального газа можно записать уравнение состояния:

$$PV = Nk_B T$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объём, N - количество частиц, k_B - постоянная Больцмана. В процессе нагрева сохраняется количество частиц:

$$Nk_B = \frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

Откуда можно записать выражение

$$R^3 = \frac{P_0}{P} \frac{T}{T_0} R_0^3$$

Чтобы найти радиус надо также найти отношение начального давления к давлению в нагретом состоянии. Для этого надо рассмотреть упругую силу, которая возникает при растяжении оболочки.

Рассмотрим сферическую оболочку в сферических координатах. Рассмотрим малый полярный угол θ , который определяет маленькую площадку на полюсе, радиус которой можно приблизительно найти как

$$r = R \sin(\theta)$$

Тогда за счёт давления на неё вверх действует сила

$$F_P = \pi r^2 P$$

Она компенсируется вертикальной компонентой силы упругости, которая вычисляется как

$$F_k = 2\pi r f \sin(\theta)$$

где

$$f = k \frac{r}{r_0} = k \frac{R}{R_0}$$

откуда получается, если приравнять силы

$$P = \frac{2k}{R_0}$$

То есть давление в рассматриваемом диапазоне растяжений оболочки не меняется, поэтому

$$\frac{P_0}{P} = 1$$

Таким образом, радиус оболочки

$$R = \left(\frac{T_c}{T_0} \left(\frac{\Omega}{4\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{\frac{1}{3}} R_0$$

Вариант 2:

В открытом космосе под солнечными лучами находится шарик - тонкая сферическая оболочка из специфического материала, заполненная идеальным газом. Шарик находится в тепловом равновесии и имеет радиус R_1 . Определите, какую часть видимого диска Солнца должно закрыть другое небесное тело (на какую часть должен уменьшиться видимый телесный угол), чтобы радиус шарика уменьшился до R_2 ? Другими источниками излучения можно пренебречь.

Информация о материале оболочки: * Коэффициент серости равен единице (поглощается всё падающее излучение). * Теплопроводность достаточно большая, что можно считать, что температура на всей поверхности одинакова. * Если растягивать круглый лоскут из этого материала равномерно во все стороны (только в плоскости этого лоскута), то, в определённом диапазоне растяжений, линейная плотность упругой силы будет пропорциональна радиусу лоскута: $f = k r/r_0$, где k - неизвестный коэффициент, r_0 - радиус лоскута в нерастянутом состоянии. Считайте, что растяжение сферической оболочки попадает в этот диапазон как в начальном, так и в нагретом состоянии.

Решение:

На оболочку попадает излучение Солнца, которое нагревает её. С другой стороны, оболочка также излучает, за счёт чего с ней отводится тепловая энергия. При определённой температуре достигается равновесие.

Найдём мощность теплового нагрева оболочки за счёт излучения Солнца. Если бы сферическая оболочка была бы окружена некоторой внешней оболочкой при температуре T , то равновесие наступило бы, когда оболочка нагрелась бы до этой же температуры. Мощность, излучаемая с поверхности оболочки с единичным коэффициентом серости можно найти из закона Стефана-Больцмана:

$$W_{\text{изл}} = S\sigma T^4$$

где $S = 4\pi R^2$ - площадь поверхности оболочки, σ - постоянная Стефана-Больцмана. В равновесии мощность поглощаемого излучения такая же. Получается, что с внешней оболочки, которая занимает полный телесный угол 4π , приходит излучение

$$W_{\text{погл}} = W_{\text{изл}}$$

При этом, ввиду сферической симметрии оболочки, с каждого направления на неё приходит одинаковое количество энергии. Поэтому, если бы вместо полного телесного угла внешняя оболочка занимала бы лишь угол Ω , мощность поглощаемого излучения была бы в $\Omega/(4\pi)$ раз меньше. Эти рассуждения позволяют вычислить мощность нагрева из-за излучения Солнца:

$$W_{\text{погл}} = \frac{\Omega}{4\pi} S\sigma T_c^4 = \Omega R^2 \sigma T_c^4$$

где T_c - температура поверхности Солнца.

Равновесная температура сферической оболочки выражается как

$$T = \left(\frac{\Omega}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}} T_c$$

Если изменится телесный угол (часть диска закроет другое тело), то изменится и температура. Необходимо теперь связать изменение температуры шарика с изменением его радиуса.

Для идеального газа можно записать уравнение состояния:

$$PV = Nk_B T$$

где $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объём, N - количество частиц, k_B - постоянная Больцмана. В процессе охлаждения сохраняется количество частиц:

$$Nk_B = \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

Откуда можно записать выражение

$$\frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1}$$

Необходимо определить отношение давлений. Для этого надо рассмотреть упругую силу, которая возникает при растяжении оболочки.

Рассмотрим сферическую оболочку в сферических координатах. Рассмотрим малый полярный угол θ , который определяет маленькую площадку на полюсе, радиус которой можно приблизительно найти как

$$r = R \sin(\theta)$$

Тогда за счёт давления на неё вверх действует сила

$$F_p = \pi r^2 P$$

Она компенсируется вертикальной компонентой силы упругости, которая вычисляется как

$$F_k = 2\pi r f \sin(\theta)$$

где

$$f = k \frac{r}{r_0} = k \frac{R}{R_0}$$

откуда получается, если приравнять силы

$$P = \frac{2k}{R_0}$$

То есть давление в рассматриваемом диапазоне растяжений оболочки не меняется, поэтому

$$\frac{P_1}{P_2} = 1$$

и

$$\frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Поэтому уменьшение телесного угла должно произойти на долю

$$1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 1 - \frac{R_2^{12}}{R_1^{12}}$$

Задача Прочность опоры

Вариант 1

Тяжёлый груз массой M устанавливается на опору высотой H , изготовленную из специального хрупкого слоистого материала. Слои очень тонкие и абсолютно жесткие, расположены горизонтально. Трение между слоями отсутствует. Какой минимальной массы можно сделать эту опору? Плотность материала опоры ρ , и он разрушается при давлении между слоями больше p_0 ; ускорение свободного падения равно g .

Решение:

Для фиксированной координаты y напряжение $\sigma(y)$ в сечении опоры $S(y)$ определяется массой груза M и массой части опоры $m(y)$, расположенной выше рассматриваемого уровня:

$$\sigma(y) = \frac{(M + m(y))g}{S(y)}$$

Если $\sigma(y) < \sigma_0$, то на данном уровне сечение опоры можно сделать меньше, что приведёт к уменьшению массы всей опоры. Поэтому для опоры с наименьшей массой должно быть справедливо

$$\sigma(y) = \sigma_0$$

откуда возникает соотношение

$$S(y) = \frac{g}{\sigma_0}(M + m(y))$$

Направим ось y вниз, а начало совместим с верхней точкой опоры. Получается, что $m(0) = 0$, и надо найти $m(H)$.

Если рассмотреть небольшое изменение уровня $y + \delta y$, то на нём масса вышерасположенной части опоры немного увеличится, и также увеличится сечение опоры:

$$S(y + \delta y) = S + \delta S$$

$$m(y + \delta y) = m + \delta m$$

На этом уровне также выполняется соотношение

$$S + \delta S = \frac{g}{\sigma_0}(M + m + \delta m)$$

откуда следует, что

$$\delta S = \frac{g}{\sigma_0} \delta m$$

При этом, т.к. на небольшом промежутке δy измерение сечения небольшое, изменение массы можно найти как

$$\delta m = \rho S \delta y$$

Подставив это выражение в предыдущее, получим

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\rho g}{\sigma_0} \delta y$$

Проинтегрировав (просуммировав по бесконечно малым промежуткам δy) это выражение от 0 до H , получим

$$\ln(S(H)) - \ln(S(0)) = \ln\left(\frac{S(H)}{S(0)}\right) = \frac{\rho g}{\sigma_0} H$$

Или

$$S(H) = S(0) \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0} H\right)$$

где площадь сечения на нулевом уровне находится из соотношения

$$S(0) = \frac{g}{\sigma_0} M$$

Наконец, так как связь площади сечения и массы вышерасположенной опоры известна, можно выразить массу всей опоры:

$$m(H) = \frac{\sigma_0}{g} S(H) - M = \left(\exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_0} H\right) - 1 \right) M$$

Вариант 2

Тяжёлый груз массой M устанавливается на опору такой же массы, изготовленную из специального хрупкого слоистого материала. Слои очень тонкие и абсолютно жесткие, расположены горизонтально. Трение между слоями отсутствует. Какой минимальной/максимальной высоты может быть эта опора? Плотность материала опоры ρ , и он разрушается при давлении между слоями больше p_0 ; ускорение свободного падения равно g .

Решение:

Для фиксированной координаты y напряжение $\sigma(y)$ в сечении опоры $S(y)$ определяется массой груза M и массой части опоры $m(y)$, расположенной выше рассматриваемого уровня:

$$\sigma(y) = \frac{(M + m(y))g}{S(y)}$$

Если $\sigma(y) < \sigma_0$, то на данном уровне сечение опоры можно сделать меньше, что приведёт к уменьшению массы всей опоры. Это уменьшение массы можно компенсировать, нарастив высоту опоры. Для опоры с фиксированной массой и наибольшей высотой должно быть справедливо

$$\sigma(y) = \sigma_0$$

откуда возникает соотношение

$$S(y) = \frac{g}{\sigma_0} (M + m(y))$$

Для наименьшей же высоты, поскольку слои абсолютно жесткие, ограничений нет, и она формально может быть близка к нулю.

Направим ось y вниз, а начало совместим с верхней точкой опоры. Получается, что $m(0) = 0$, и надо найти такое H , что $m(H) = M$.

Если рассмотреть небольшое изменение уровня $y + \delta y$, то на нём масса вышерасположенной части опоры немного увеличится, и также увеличится сечение опоры:

$$S(y + \delta y) = S + \delta S$$

$$m(y + \delta y) = m + \delta m$$

На этом уровне также выполняется соотношение

$$S + \delta S = \frac{g}{\sigma_0} (M + m + \delta m)$$

откуда следует, что

$$\delta S = \frac{g}{\sigma_0} \delta m$$

При этом, т.к. на небольшом промежутке δy изменение сечения небольшое, изменение массы можно найти как

$$\delta m = \rho S \delta y$$

Подставив это выражение в предыдущее, получим

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{\rho g}{\sigma_0} \delta y$$

Проинтегрировав (просуммировав по бесконечно малым промежуткам δy) это выражение от 0 до H , получим

$$\ln(S(H)) - \ln(S(0)) = \ln\left(\frac{S(H)}{S(0)}\right) = \frac{\rho g}{\sigma_0} H$$

где площадь сечения на нулевом уровне, где располагается груз, равна

$$S(0) = \frac{g}{\sigma_0} M$$

а площадь сечения на уровне H , у основания опоры, в два раза больше, т.к. $m(H) = M$:

$$S(H) = \frac{2g}{\sigma_0} M$$

Отсюда можно выразить искомую высоту опоры:

$$H = \frac{\ln(2) \sigma_0}{\rho g}$$