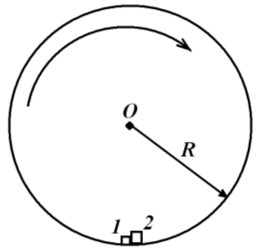
**Министерство науки и высшего образования РФ**
**Совет ректоров вузов Томской области**
**Открытая региональная межвузовская олимпиада**
**2022-2023**
**ФИЗИКА**
**11 класс**
**II этап**
**Вариант 1**

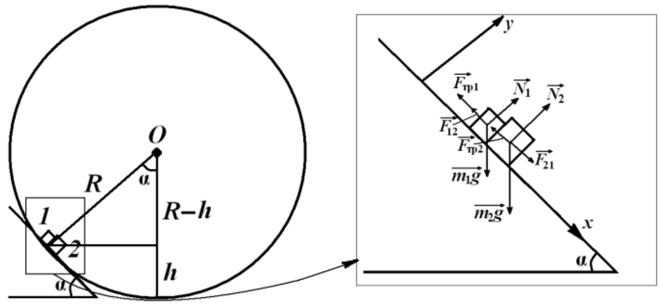
1. Два маленьких кубика массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ ($\boldsymbol{m_1} < \boldsymbol{m_2}$) находятся на внутренней поверхности горизонтального цилиндра (барабана), радиус основания которого равен $\boldsymbol{R}$ (см. рисунок). Цилиндр очень медленно вращается относительно собственной геометрической оси (т. $O$) с постоянной угловой скоростью. Определите, на какую максимальную высоту, от нижней точки цилиндра, поднимутся кубики, если они находятся в постоянном контакте друг с другом, а коэффициенты трения кубиков о внутреннюю поверхность цилиндра равны соответственно $\boldsymbol{\mu_1}$ и $\boldsymbol{\mu_2}$ ($\boldsymbol{\mu_1} < \boldsymbol{\mu_2}$). Размерами кубиков можно пренебречь по сравнению с радиусом цилиндра.




**Максимальный балл - 10**

**Решение:**

1. Изобразим рисунок. Т.к. размерами кубиков можно пренебречь, можно считать, что кубики находятся на одной высоте $h$ на наклонной плоскости, являющейся касательной к поверхности цилиндра.




Расставим все силы, действующие на каждый кубик: силы тяжести – $m_1g$ и $m_2g$; силы трения – $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$; силы нормальной реакции – $N_1$ и $N_2$; силы взаимодействия между кубиками – $F_{12}$ и $F_{21}$. **(2 балла)**

2. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси для каждого кубика в ситуации, когда кубики начинают скользить:

OX: $m_1 g\sin\alpha - \mu_1 N_1 - F_{12} = 0$; $\quad m_2 g\sin\alpha - \mu_2 N_2 + F_{21} = 0$ (1)

Нормальным (центростремительным) ускорением пренебрежём, т.к., по условию, цилиндр вращается очень медленно.

OY: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$; $\quad N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0$. (2) **(2 балла)**

3. Из (2) выразим силы нормальной реакции и подставим в (1). После этого, выразим силы взаимодействия между кубиками и приравняем их по 3 закону Ньютона.

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = F_{12}; \qquad \mu_2 m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha = F_{21},$$

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = \mu_2 m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha,$$

$$(m_1 + m_2)\sin\alpha = (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha,$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = Z. \qquad (3)$$ **(2 балла)**

4. Из левой части рисунка видно, что высота, на которую поднимутся кубики:

$$R-h=R\cos\alpha\,,\qquad h=R(1-\cos\alpha). \qquad (4) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

5. Выразим cos α из (3) и подставим в (4):

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=Z^2\,,\qquad 1-\cos^2\alpha=Z^2\cos^2\alpha\,,\qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+Z^2}\,,$$

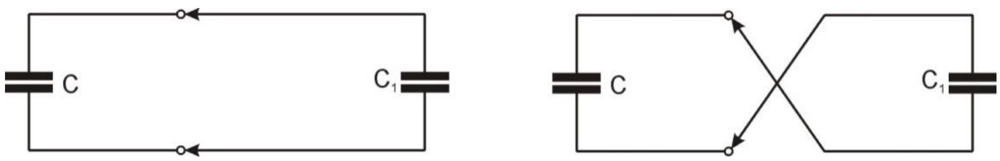
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}\,. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

6. В итоге, высота, на которую поднимутся кубики:

$$h=R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}\right). \qquad \textbf{(2 балла)}$$

**Ответ:** $h=R\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}\right)$.

2. Конденсатор С емкости 9 мкФ первоначально заряжен от источника тока до напряжения 100В и отключен от него. К нему подключается другой (незаряженный) конденсатор С1 емкости 1 мкФ (рис. 1). Затем конденсатор С1 отсоединяют от С и вновь подсоединяют к нему, но так, что теперь верхняя пластина конденсатора С оказывается соединенной с нижней пластиной конденсатора С1 (рис. 2). Когда напряжение на конденсаторах установится, конденсатор С1 снова отсоединяют от С и вновь подсоединяют к нему в перевернутом виде. Всего эту процедуру проделывают пять раз. Чему будет равно напряжение на конденсаторе С после пятого переворота? **Максимальный балл - 15**




**Решение:**

Начальный заряд конденсатора С $q_0=CU_0=9\cdot10^{-6}\cdot100=9\cdot10^{-4}$ Кл. Когда к нему подсоединяют конденсатор $C_1$, заряд распределяется на оба конденсатора так, что напряжения на обоих должны быть одинаковы:

$$q_0\cdot\left(C+C_1\right)=q_C\cdot C=q_{C_1}\cdot C_1\Rightarrow q_C=q_0\frac{C}{C+C_1};q_{C_1}=q_0\frac{C_1}{C+C_1} \qquad \textbf{(2 балла)}$$

При зарядке конденсатора под его зарядом понимается заряд обкладки; на одной заряд положительный, на второй – отрицательный. При отсоединении $C_1$ от C, его перевороте и повторном соединении заряд на каждой паре пластин (он же заряд батареи конденсаторов) будет

$$q_1 = q_C - q_{C_1} = q_0 \frac{C - C_1}{C + C_1}$$ **(3 балла)**

Новый заряд распределится между конденсаторами так же, как указано выше:

$$q_C = q_1 \frac{C}{C + C_1}; q_{C_1} = q_1 \frac{C_1}{C + C_1}$$ **(2 балла)**

При отсоединении $C_1$ от C, его перевороте и повторном соединении заряд батареи конденсаторов будет

$$q_2 = q_C - q_{C_1} = q_1 \frac{C - C_1}{C + C_1}$$ **(3 балла)**

И так далее.
Хорошо видно, что заряды батареи конденсаторов после каждого переворота образуют геометрическую прогрессию. После пятого переворота

$$q_5 = q_0 \left( \frac{C - C_1}{C + C_1} \right)^5 = 9 \cdot 10^{-4} \cdot \left( \frac{9 - 1}{9 + 1} \right)^5 = 2,95 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$ **(3 балла)**

Напряжение на батарее (оно же – напряжение на конденсаторе C)

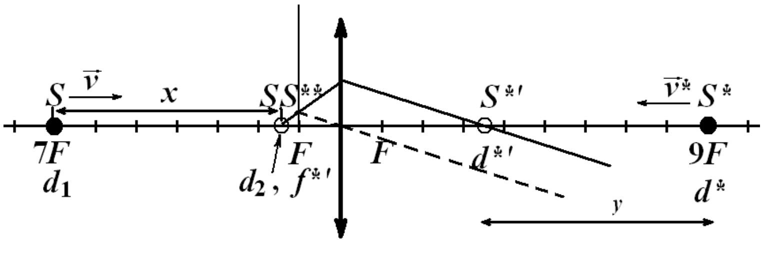
$$U_5 = \frac{q_5}{C + C_1} = \frac{2,95 \cdot 10^{-4}}{(9 + 1) \cdot 10^{-6}} = 29,5$$ **(2 балла)**

**Ответ:** $U_5 = \frac{q_5}{C + C_1} = \frac{2,95 \cdot 10^{-4}}{(9 + 1) \cdot 10^{-6}} = 29,5$ В

3. Вдоль главной оптической оси по разные стороны от собирающей линзы с фокусным расстоянием $\boldsymbol{F}$ навстречу друг другу движутся два точечных источника света. Скорость первого источника равна $\boldsymbol{v}$, а второго источника в 1,5 раза больше, чем у первого источника. В начальный момент времени первый источник находится на расстоянии **7*F*** от линзы, а второй – на расстоянии **9*F*** от линзы. Определите, через какое время первый источник встретится с изображением второго. **Максимальный балл - 15**

**Решение:**

1. Изобразим рисунок.




**(3 балла)**

2. Обозначим точку встречи первого источника $S$ и изображения второго источника $S^{*\prime}$ – $SS^{**}$. Она находится на расстоянии $d_2$ ($f^{*\prime}$) от линзы:

$$d_2 = d_1 - vt = 7F - vt = f^{*\prime}. \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Из формулы тонкой линзы для движущегося второго источника $S^*$ в положении $S^{*\prime}$:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d^{*\prime}} + \frac{1}{f^{*\prime}}, \qquad (2)$$

где $d^{*\prime} = d^* - v^* t = 9F - 1{,}5vt$. (3) **(3 балла)**

4. Подставим (1) и (3) в (2), и выразим искомое время:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{9F - 1{,}5vt} + \frac{1}{7F - vt},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{7F - vt + 9F - 1{,}5vt}{(7F - vt)(9F - 1{,}5vt)},$$

$$63F^2 - 19{,}5vtF + 1{,}5v^2t^2 = 16F^2 - 2{,}5vtF,$$

$$1{,}5v^2t^2 - 17vtF + 47F^2 = 0,$$

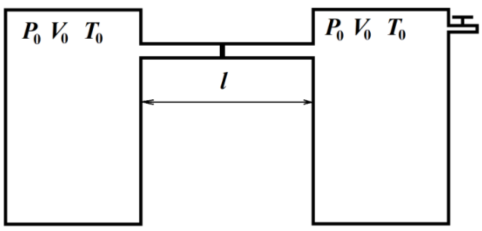
$$t_{1,2} = \frac{17vF \pm \sqrt{289v^2F^2 - 282v^2F^2}}{3v^2} = \frac{17F \pm F\sqrt{7}}{3v} = \frac{F}{v}\left(\frac{17 \pm \sqrt{7}}{3}\right). \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Момент времени $t = \frac{F}{v}\left(\frac{17 + \sqrt{7}}{3}\right)$ нас не устраивает, т.к. за это время второй источник переместиться на $9{,}822F$, т.е. по другую сторону линзы. Чего быть не может.

Окончательный ответ: $t = \frac{F}{v}\left(\frac{17 - \sqrt{7}}{3}\right) \approx 4{,}785\frac{F}{v}$ **(3 балла)**

**Ответ:** $t = \frac{F}{v}\left(\frac{17 - \sqrt{7}}{3}\right) \approx 4{,}785\frac{F}{v}$

4. Два одинаковых баллона объёмом $\boldsymbol{V_0}$ соединены между собой трубкой длины $\boldsymbol{l}$ и площадью поперечного сечения $\boldsymbol{S}$. В баллонах при одинаковых условиях находится идеальный газ с молярной массой $\boldsymbol{\mu}$ при давлении $\boldsymbol{P_0}$ (больше атмосферного давления $\boldsymbol{P_a}$) и температуре $\boldsymbol{T_0}$. Строго посередине трубки находится капля жидкости, полностью перекрывающая сечение трубки, но размеры которой много меньше длины трубки (см. рисунок). В какой-то момент, из одного баллона очень медленно начинают выпускать газ (изотермически) так, что масса оставшегося в баллоне газа уменьшается по закону $\boldsymbol{m(t) = m_0 - \alpha t}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ – известная постоянная. Определите время, за которое капля попадёт в негерметичный баллон. **Максимальный балл - 30**




**Решение:**

С учётом того, что процесс выпускания газа из правого (по рисунку) баллона изотермический, то уравнение состояния идеального газа в нём для любого момента времени можно записать:

$$P_1V_1 = P_1\left(V_0 + \frac{lS}{2} - xS\right) = \frac{RT_0}{\mu}m = \frac{m_0RT_0}{\mu} - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t = P_0V_0 - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t, \qquad (1) \qquad \textbf{(6 баллов)}$$

где $x$ – смещение капли вправо.

2. Для левого (по рисунку) баллона процесс расширения газа будет тоже изотермическим, и уравнение состояния идеального газа в нём для любого момента времени можно записать:

$$P_2V_2 = P_2\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right) = \frac{m_0RT_0}{\mu} = P_0V_0 . \quad (2)$$ **(6 баллов)**

3. Условие равновесия для капли – равенство давлений справа и слева:

$$P_1 = P_2 .$$ **(2 балла)**

4. Выразим давления из (1) и (2), а затем приравняем их.

$$P_1 = \frac{P_0V_0 - \dfrac{\alpha RT_0}{\mu}t}{V_0 + \dfrac{lS}{2} - xS} = \frac{P_0V_0}{V_0 + \dfrac{lS}{2} + xS} = P_2 ,$$

$$P_0V_0\left(V_0 + \frac{lS}{2}\right) + P_0V_0xS - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right) = P_0V_0\left(V_0 + \frac{lS}{2}\right) - P_0V_0xS ,$$

$$2P_0V_0xS = \frac{\alpha RT_0}{\mu}t\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right).$$

Время движения капли и её смещение связаны соотношением:

$$t = \frac{2P_0V_0xS\mu}{\alpha RT_0\left(V_0 + \dfrac{lS}{2} + xS\right)} . \quad (3)$$ **(10 баллов)**

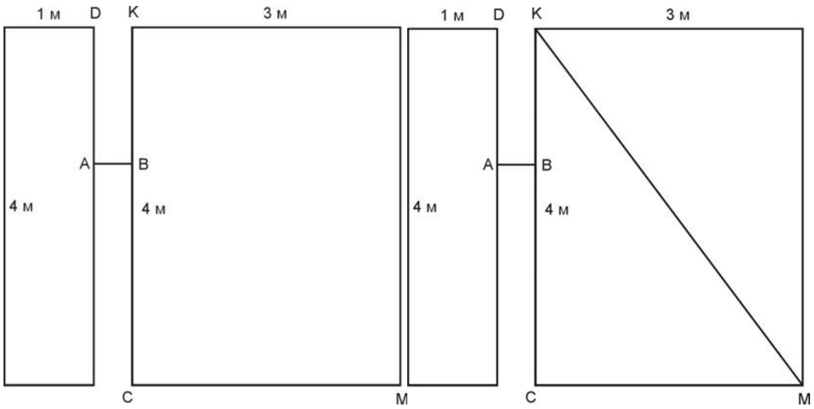
5. Подставим в (3) смещение равное половине длины трубки, и получим искомое время τ:

$$\tau = \frac{P_0V_0lS\mu}{\alpha RT_0\left(V_0 + \dfrac{lS}{2} + \dfrac{lS}{2}\right)} = \frac{P_0V_0lS\mu}{\alpha RT_0(V_0 + lS)} .$$ **(6 баллов)**

**Ответ:** $\tau = \dfrac{P_0V_0lS\mu}{\alpha RT_0(V_0 + lS)}$

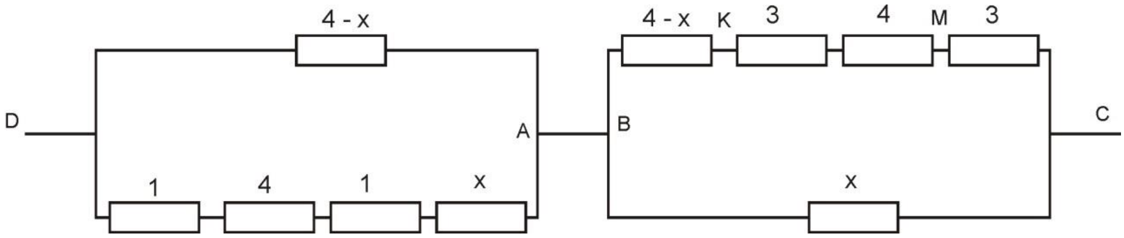
5. Прямоугольники сделаны из отрезков проволоки, 1 м которой имеет сопротивление 1 Ом. Перемычка $AB$ нулевого сопротивления замыкает их (см. рис.1). К точкам $C$ и $D$ прикладывают постоянное напряжение и двигают перемычку до тех пор, пока ток через нее не примет минимальное значение. После этого точки $K$ и $M$ замыкают такой же проволокой (см. рис. 2) и снова двигают перемычку до тех пор, пока через нее не пойдет минимальный ток. Разница минимальных токов

через перемычку составила 0,4 А. Как изменился ток после замыкания? Чему равно приложенное к точкам *C* и *D* постоянное напряжение? **Максимальный балл - 30**




**Решение:**

Обозначим BC = x. Тогда эквивалентная схема для рис. 1 будет выглядеть так (номиналы сопротивлений даны в Омах согласно условию):




**(3 балла)**

Полное сопротивление участка CD

$$R_1 = \frac{(4-x)\cdot(6+x)}{10} + \frac{(14-x)\cdot x}{14} = \frac{84+28x-6x^2}{35}$$ **(4 балла)**

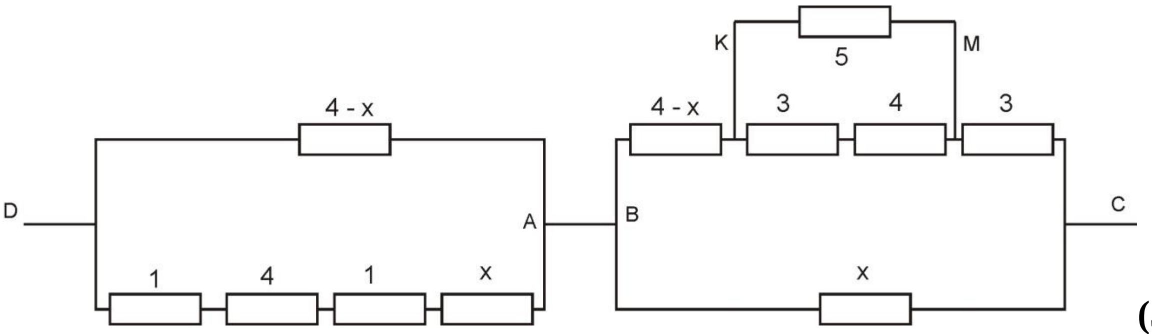
Минимальный ток пойдет через перемычку, когда это сопротивление будет максимальным. Значение x, соответствующее максимальному сопротивлению, легко определяется из формулы для координаты вершины параболы, соответствующей числителю дроби:

$$x_{\min} = -\frac{28}{-12} = \frac{7}{3} \text{ м.}$$ **(4 балла)**

Тогда максимальное сопротивление

$$R_{1\max} = \frac{84 + 28\cdot\frac{7}{3} - 6\left(\frac{7}{3}\right)^2}{35} = 3{,}33\,\text{Ом}$$ **(2 балла)**

По аналогии эквивалентная схема для рис. 2 будет выглядеть так (номиналы сопротивлений даны в Омах согласно условию):




**(3 балла)**

Полное сопротивление участка CD

$$R_2 = \frac{(4-x)\cdot(6+x)}{10} + \frac{\left(7 - x + \frac{35}{12}\right)\cdot x}{7+\frac{35}{12}} = 2,4 + 0,8x - 0,2x^2$$ **(4 балла)**

Минимальный ток пойдет через перемычку, когда это сопротивление будет максимальным. Значение x, соответствующее максимальному сопротивлению, легко определяется из формулы для координаты вершины параболы, соответствующей числителю дроби:

$$x_{\min} = -\frac{0,8}{-0,4} = 2 \text{ м.}$$ **(4 балла)**

Тогда максимальное сопротивление

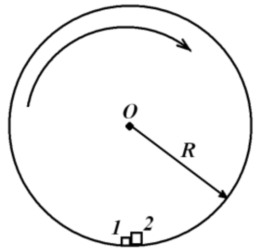
$$R_{2\max} = 2,4 + 0,8\cdot 2 - 0,2\cdot 2^2 = 3,2\ \text{Ом}$$ **(2 балла)**

Разница минимальных токов

$$I_{2\min} - I_{1\min} = U\cdot\left(\frac{1}{R_{2\max}} - \frac{1}{R_{1\max}}\right) = 32\cdot\left(\frac{1}{3,2} - \frac{1}{3,33}\right) = 0,4 \text{ А.}$$ **(4 балла)**

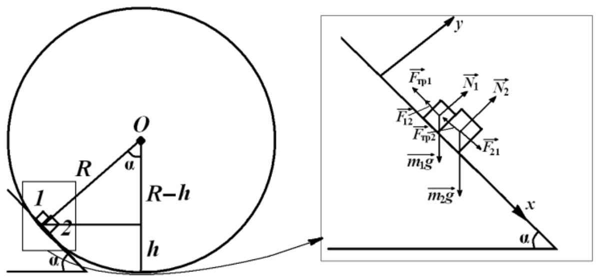
**Ответ:** минимальный ток <u>увеличился</u> на 0,4 А.

**Министерство науки и высшего образования РФ**
**Совет ректоров вузов Томской области**
**Открытая региональная межвузовская олимпиада**
**2021-2022**
**ФИЗИКА**
**11 класс**
**II этап**
**Вариант 2**




1. Два маленьких кубика массами $\boldsymbol{m_1}$ и $\boldsymbol{m_2}$ ($\boldsymbol{m_1} < \boldsymbol{m_2}$) находятся на внутренней поверхности горизонтального цилиндра (барабана). Цилиндр очень медленно вращается относительно собственной геометрической оси (т. *O*) с постоянной угловой скоростью. Определите, во сколько раз радиус основания цилиндра больше максимальной высоты, от нижней точки цилиндра, на которую поднимутся кубики. Кубики находятся в постоянном контакте друг с другом, а коэффициенты трения кубиков о внутреннюю поверхность цилиндра равны соответственно $\boldsymbol{\mu_1}$ и $\boldsymbol{\mu_2}$ ($\boldsymbol{\mu_1} < \boldsymbol{\mu_2}$). Размерами кубиков можно пренебречь по сравнению с радиусом цилиндра. **Максимальный балл - 10**

**Решение:**




1. Изобразим рисунок. Т.к. размерами кубиков можно пренебречь, можно считать, что кубики находятся на одной высоте $h$ на наклонной плоскости, являющейся касательной к поверхности цилиндра.

Расставим все силы, действующие на каждый кубик: силы тяжести – $m_1g$ и $m_2g$; силы трения – $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$; силы нормальной реакции – $N_1$ и $N_2$; силы взаимодействия между кубиками – $F_{12}$ и $F_{21}$. **(2 балла)**

2. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на координатные оси для каждого кубика в ситуации, когда кубики начинают скользить:

OX: $m_1 g\sin\alpha - \mu_1 N_1 - F_{12} = 0$; $\quad m_2 g\sin\alpha - \mu_2 N_2 + F_{21} = 0$ (1)

Нормальным (центростремительным) ускорением пренебрежём, т.к., по условию, цилиндр вращается очень медленно.

OY: $N_1 - m_1 g\cos\alpha = 0$; $\quad N_2 - m_2 g\cos\alpha = 0$. (2) **(2 балла)**

3. Из (2) выразим силы нормальной реакции и подставим в (1). После этого, выразим силы взаимодействия между кубиками и приравняем их по 3 закону Ньютона.

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = F_{12}; \qquad \mu_2 m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha = F_{21},$$

$$m_1 g\sin\alpha - \mu_1 m_1 g\cos\alpha = \mu_2 m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha,$$

$$(m_1 + m_2)\sin\alpha = (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha,$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = Z. \qquad (3)$$ **(2 балла)**

4. Из левой части рисунка видно, что высота, на которую поднимутся кубики:

$R-h=R\cos\alpha$, $\quad h=R(1-\cos\alpha)$. (4) **(1 балл)**

5. Выразим cos α из (3) и подставим в (4):

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=Z^2, \qquad 1-\cos^2\alpha=Z^2\cos^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{1+Z^2},$$

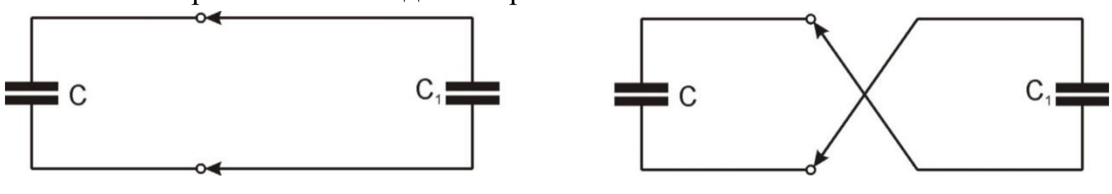
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+Z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}.$$ **(1 балл)**

6. В итоге, отношение радиуса цилиндра к высоте, на которую поднимутся кубики:

$$\frac{R}{h}=\frac{1}{1-\cos\alpha}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}-1}.$$ **(2 балла)**

**Ответ:** $\frac{R}{h}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)^2}-1}.$

2. Конденсатор ***C*** емкости 9 мкФ первоначально заряжен от источника тока до некоторого напряжения и отключен от него. К нему подключается другой (незаряженный) конденсатор ***C₁*** емкости 1 мкФ (рис. 1). Затем конденсатор ***C₁*** отсоединяют от **C** и вновь подсоединяют к нему, но так, что теперь верхняя пластина конденсатора С оказывается соединенной с нижней пластиной конденсатора ***C₁*** (рис. 2). Когда напряжение на конденсаторах установится, конденсатор ***C₁*** снова отсоединяют от ***C*** и вновь подсоединяют к нему в перевернутом виде. Всего эту процедуру проделывают пять раз. После пятого переворота напряжение на конденсаторе ***C*** равно 30 В. Чему равно начальное напряжение на конденсаторе ***C***? **Максимальный балл - 15**




**Решение:**

Начальный заряд конденсатора С $q_0=CU_0$ Кл. Когда к нему подсоединяют конденсатор $C_1$, заряд распределяется на оба конденсатора так, что напряжения на обоих должны быть одинаковы:

$$q_0\cdot(C+C_1)=q_C\cdot C=q_{C_1}\cdot C_1\Rightarrow q_C=q_0\frac{C}{C+C_1};q_{C_1}=q_0\frac{C_1}{C+C_1}$$ **(2 балла)**

При зарядке конденсатора под его зарядом понимается заряд обкладки; на одной заряд положительный, на второй – отрицательный. При отсоединении $C_1$ от С, его перевороте и повторном соединении заряд на каждой паре пластин (он же заряд батареи конденсаторов) будет

$$q_1 = q_C - q_{C_1} = q_0 \frac{C - C_1}{C + C_1}$$ **(3 балла)**

Новый заряд распределится между конденсаторами так же, как указано выше:

$$q_C = q_1 \frac{C}{C + C_1}; q_{C_1} = q_1 \frac{C_1}{C + C_1}$$ **(2 балла)**

При отсоединении $C_1$ от С, его перевороте и повторном соединении заряд батареи конденсаторов будет

$$q_2 = q_C - q_{C_1} = q_1 \frac{C - C_1}{C + C_1}$$ **(3 балла)**

И так далее.

Хорошо видно, что заряды батареи конденсаторов после каждого переворота образуют геометрическую прогрессию После пятого переворота

$$q_5 = q_0 \left(\frac{C - C_1}{C + C_1}\right)^5 = q_0 \cdot \left(\frac{9-1}{9+1}\right)^5 = q_0 \cdot (0,8)^5 \text{ Кл}$$ **(3 балла)**

Согласно условию задачи, $q_5 = U_5 \cdot (C + C_1) = 30 \cdot (9+1) \cdot 10^{-6} = 3 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Отсюда начальный заряд конденсатора С

$$q_0 \cdot (0,8)^5 = 3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow q_0 = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{(0,8)^5} = 9,15 \cdot 10^{-4} \text{ Кл}$$ **(1 балл)**

Начальное напряжение на конденсаторе С

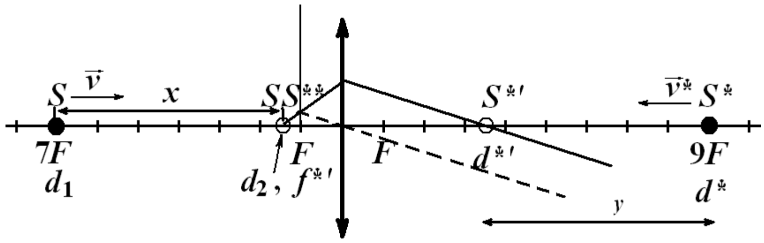
$$U_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{9,15 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-6}} = 102 \text{ В}$$ **(1 балл)**

**Ответ:** $U_0 = \frac{q_0}{C} = \frac{9,15 \cdot 10^{-4}}{9 \cdot 10^{-6}} = 102$ В

3. Вдоль главной оптической оси по разные стороны от собирающей линзы с фокусным расстоянием ***F*** навстречу друг другу движутся два точечных источника света. Скорость второго источника в 1,5 раза больше, чем у первого источника. В начальный момент времени первый источник находится на расстоянии **7*F*** от линзы, а второй – на расстоянии **9*F*** от линзы. Определите, скорость движения первого источника, если через время $\boldsymbol{\tau}$ он встретился с изображением второго. **Максимальный балл - 15**

**Решение**

1. Изобразим рисунок.




**(3 балла)**

2. Обозначим точку встречи первого источника $S$ и изображения второго источника $S^{*'}$ – $SS^{**}$. Она находится на расстоянии $d_2$ ($f^{*'}$) от линзы:

$d_2 = d_1 - v\tau = 7F - v\tau = f^{*'}$. (1) **(2 балла)**

3. Из формулы тонкой линзы для движущегося второго источника $S^*$ в положении $S^{*'}$:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d^{*'}} + \frac{1}{f^{*'}}, \qquad (2)$$

где $d^{*'} = d^* - v^*\tau = 9F - 1{,}5v\tau$. (3) **(3 балла)**

4. Подставим (1) и (3) в (2), и выразим искомую скорость:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{9F - 1{,}5v\tau} + \frac{1}{7F - v\tau},$$

$$\frac{1}{F} = \frac{7F - v\tau + 9F - 1{,}5v\tau}{(7F - v\tau)(9F - 1{,}5v\tau)},$$

$$63F^2 - 19{,}5v\tau F + 1{,}5v^2\tau^2 = 16F^2 - 2{,}5v\tau F,$$

$$1{,}5\tau^2 \cdot v^2 - 17F\tau \cdot v + 47F^2 = 0,$$

$$v_{1,2} = \frac{17F\tau \pm \sqrt{289F^2\tau^2 - 282F^2\tau^2}}{3\tau^2} = \frac{17F \pm F\sqrt{7}}{3\tau} = \frac{F}{\tau}\left(\frac{17 \pm \sqrt{7}}{3}\right).$$ **(4 балла)**

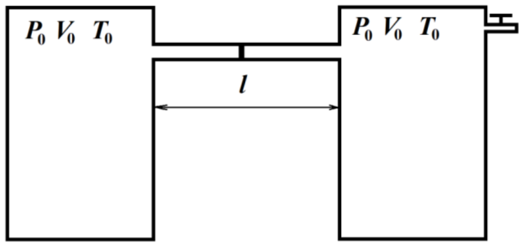
Скорость $v = \frac{F}{\tau}\left(\frac{17+\sqrt{7}}{3}\right)$ нас не устраивает, т.к. с этой скоростью, за указанное время, второй источник переместиться на $9{,}822F$, т.е. по другую сторону линзы. Чего быть не может.

Окончательный ответ: $v = \frac{F}{\tau}\left(\frac{17-\sqrt{7}}{3}\right) \approx 4{,}785\frac{F}{\tau}$ **(3 балла)**

$$v = \frac{F}{\tau}\left(\frac{17-\sqrt{7}}{3}\right) \approx 4{,}785\frac{F}{\tau}$$

**Ответ:**

4. Два одинаковых баллона объёмом $\boldsymbol{V_0}$ соединены между собой трубкой длины $\boldsymbol{l}$ и с неизвестной площадью поперечного сечения. В баллонах при одинаковых условиях находится идеальный газ с молярной массой $\boldsymbol{\mu}$ при давлении $\boldsymbol{P_0}$ (больше атмосферного давления $P_а$) и температуре $\boldsymbol{T_0}$. Строго посередине трубки находится капля жидкости, полностью перекрывающая сечение трубки, но размеры которой много меньше длины трубки (см. рисунок). В какой-то момент, из одного баллона очень медленно начинают выпускать газ (изотермически) так, что масса оставшегося в баллоне газа уменьшается по закону $m(t) = m_0 - \alpha t$, где $\boldsymbol{\alpha}$ – известная постоянная. Определите площадь поперечного сечения трубки, если капля попадёт в негерметичный баллон за время $\boldsymbol{\tau}$. **Максимальный балл - 30**




**Решение:**

1. С учётом того, что процесс выпускания газа из правого (по рисунку) баллона изотермический, то уравнение состояния идеального газа в нём для любого момента времени можно записать:

$$P_1V_1 = P_1\left(V_0 + \frac{lS}{2} - xS\right) = \frac{RT_0}{\mu}m = \frac{m_0RT_0}{\mu} - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t = P_0V_0 - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t, \qquad (1)$$ **(6 баллов)**

где $x$ – смещение капли вправо.

2. Для левого (по рисунку) баллона процесс расширения газа будет тоже изотермическим, и уравнение состояния идеального газа в нём для любого момента времени можно записать:

$$P_2V_2 = P_2\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right) = \frac{m_0RT_0}{\mu} = P_0V_0. \quad (2)$$ **(6 баллов)**

3. Условие равновесия для капли – равенство давлений справа и слева:

$$P_1 = P_2.$$ **(2 балла)**

4. Выразим давления из (1) и (2), а затем приравняем их.

$$P_1 = \frac{P_0V_0 - \dfrac{\alpha RT_0}{\mu}t}{V_0 + \dfrac{lS}{2} - xS} = \frac{P_0V_0}{V_0 + \dfrac{lS}{2} + xS} = P_2,$$

$$P_0V_0\left(V_0 + \frac{lS}{2}\right) + P_0V_0xS - \frac{\alpha RT_0}{\mu}t\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right) = P_0V_0\left(V_0 + \frac{lS}{2}\right) - P_0V_0xS,$$

$$2P_0V_0xS = \frac{\alpha RT_0}{\mu}t\left(V_0 + \frac{lS}{2} + xS\right). \qquad (3)$$ **(10 баллов)**

5. Подставим в (3) смещение равное половине длины трубки и время τ, и получим искомое значение площади поперечного сечения трубки:

$$P_0V_0l \cdot S = \frac{\alpha RT_0}{\mu}\tau\left(V_0 + \frac{lS}{2} + \frac{lS}{2}\right) = \frac{\alpha RT_0V_0}{\mu}\tau + \frac{\alpha RT_0l}{\mu}\tau \cdot S,$$

$$\left(P_0V_0 - \frac{\alpha RT_0}{\mu}\tau\right)l \cdot S = \frac{\alpha RT_0V_0}{\mu}\tau,$$

$$S = \frac{V_0 \cdot \alpha RT_0\tau}{l \cdot (P_0V_0\mu - \alpha RT_0\tau)}.$$ **(6 баллов)**

**Ответ:** $S = \dfrac{V_0 \cdot \alpha RT_0\tau}{l \cdot (P_0V_0\mu - \alpha RT_0\tau)}$

5. Прямоугольники сделаны из отрезков проволоки, 1 м которой имеет сопротивление 1 Ом. Перемычка АВ нулевого сопротивления замыкает их (см. рис.1). К точкам С и D прикладывают постоянное напряжение и двигают перемычку до тех пор, пока ток через нее не примет минимальное значение. После этого точки К и М замыкают такой же проволокой (см. рис. 2) и снова двигают перемычку до тех пор, пока через нее не пойдет минимальный ток. Разница минимальных токов

через перемычку составила 0,4 А. Как изменился ток после замыкания? Чему равно приложенное к точкам C и D постоянное напряжение? **Максимальный балл - 30**

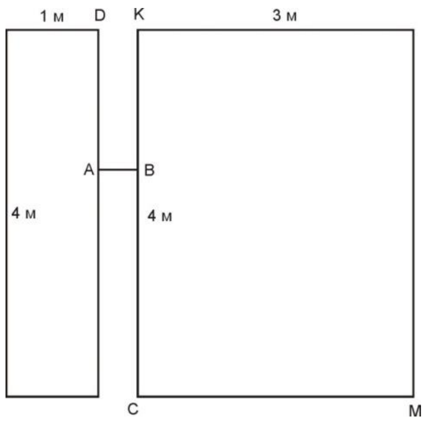



Рис. 1

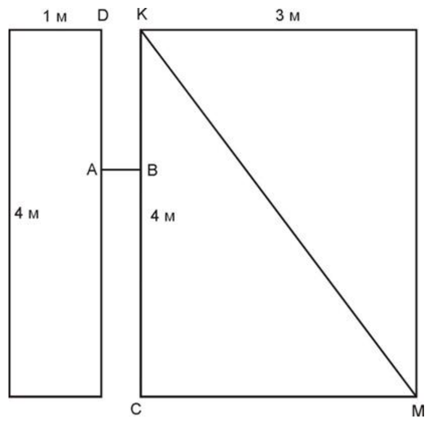
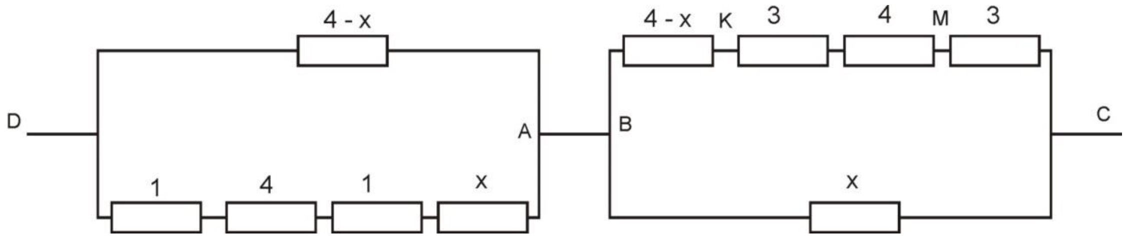



Рис. 2

**Решение**

Обозначим BC = x. Тогда эквивалентная схема для рис. 1 будет выглядеть так (номиналы сопротивлений даны в Омах согласно условию):




**(3 балла)**

Полное сопротивление участка CD

$$R_1 = \frac{(4-x)\cdot(6+x)}{10} + \frac{(14-x)\cdot x}{14} = \frac{84+28x-6x^2}{35}$$ **(4 балла)**

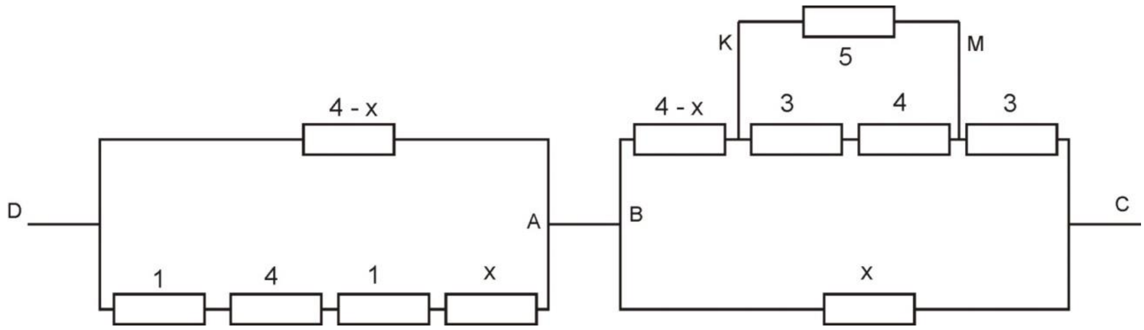
Минимальный ток пойдет через перемычку, когда это сопротивление будет максимальным. Значение x, соответствующее максимальному сопротивлению, легко определяется из формулы для координаты вершины параболы, соответствующей числителю дроби:

$$x_{\min} = -\frac{28}{-12} = \frac{7}{3} \text{ м.}$$ **(4 балла)**

Тогда максимальное сопротивление

$$R_{1\max} = \frac{84 + 28\cdot\frac{7}{3} - 6\left(\frac{7}{3}\right)^2}{35} = 3{,}33\,\text{Ом}$$ **(2 балла)**

По аналогии эквивалентная схема для рис. 2 будет выглядеть так (номиналы сопротивлений даны в Омах согласно условию):




**(3 балла)**

Полное сопротивление участка CD

$$R_2 = \frac{(4-x)\cdot(6+x)}{10} + \frac{\left(7-x+\frac{35}{12}\right)\cdot x}{7+\frac{35}{12}} = 2,4+0,8x-0,2x^2$$ **(4 балла)**

Минимальный ток пойдет через перемычку, когда это сопротивление будет максимальным. Значение x, соответствующее максимальному сопротивлению, легко определяется из формулы для координаты вершины параболы, соответствующей числителю дроби:

$$x_{\min} = -\frac{0,8}{-0,4} = 2 \text{ м.}$$ **(4 балла)**

Тогда максимальное сопротивление

$$R_{2\max} = 2,4+0,8\cdot 2-0,2\cdot 2^2 = 3,2\,\text{Ом}$$ **(2 балла)**

Разница минимальных токов

$$I_{2\min} - I_{1\min} = U\cdot\left(\frac{1}{R_{2\max}} - \frac{1}{R_{1\max}}\right) = U\cdot\left(\frac{1}{3,2} - \frac{1}{3,33}\right) \text{ А.}$$

Из формулы видно, что выражение будет положительным, а значит, минимальный ток <u>увеличится</u>.

Из условия задачи следует:

$$I_{2\min} - I_{1\min} = 0,4A = U\cdot\left(\frac{1}{R_{2\max}} - \frac{1}{R_{1\max}}\right) = U\cdot\left(\frac{1}{3,2} - \frac{1}{3,33}\right) \Rightarrow U = \frac{0,4}{\frac{1}{3,2}-\frac{1}{3,33}} = 32\,\text{В}$$ **(4 балла)**

**Ответ:** минимальный ток <u>увеличился</u> , напряжение между точками C и D равно 32 В.

**Максимальный балл - 100**