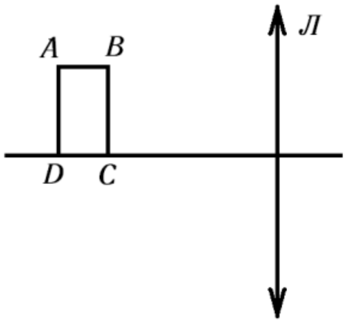
Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2023-2024
ФИЗИКА
11 класс

II этап

Вариант 1



1. Прямоугольник *ABCD* располагается так, что отрезок *CD* лежит на главной оптической оси, а отрезки *BC* и *DA* перпендикулярны главной оптической оси тонкой линзы (см. рис). Изображение отрезка *DA* оказалось в $\Gamma_1 = 2{,}5$ раза больше, а отрезка *BC* – в $\Gamma_2 = 6$ раз больше. Определите во сколько раз площадь изображения, полученного при помощи линзы, больше площади прямоугольника *ABCD*. Ответ запишите с точностью до сотых долей.

Решение

1. Обозначим $AD = BC = a$. Центр линзы обозначим точкой *O*.

В условии задачи не сказано, какая используется линза (собирающая или рассеивающая) и как относительно фокуса располагаются точки *C* и *D*. Т.к. по условию задачи линейные увеличения $\Gamma_2 > \Gamma_1 > 1$, то можно сделать однозначный вывод, что линза собирающая, а точки *C* и *D* лежат между первым и вторым фокусом. Рассеивающая линза даёт уменьшенные мнимые изображения (что противоречит $\Gamma_1 > 1,\ \Gamma_2 > 1$). Если бы точки *C* и *D* лежали между собирающей линзой и первым фокусом, то Γ_1 должно было быть больше Γ_2 (что противоречит $\Gamma_2 > \Gamma_1$). Если бы точки *C* и *D* лежали от собирающей линзы дальше второго фокуса, изображения были бы уменьшенными (что противоречит $\Gamma_1 > 1, \Gamma_2 > 1$). **(2 балла)**

2. Для начала, определим длину отрезка *CD*. Воспользуемся формулами линейного увеличения и тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{OD'}, \text{ где } \Gamma_1 = \frac{A'D'}{AD} = \frac{OD'}{OD},\ OD' = OD \cdot \Gamma_1,$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{\Gamma_1 \cdot OD} = \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1 \cdot OD},\ OD = \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} \cdot F.$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'}, \text{ где } \Gamma_2 = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC},\ OC' = OC \cdot \Gamma_2,$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{\Gamma_2 \cdot OC} = \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2 \cdot OC},\ OC = \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} \cdot F.$$

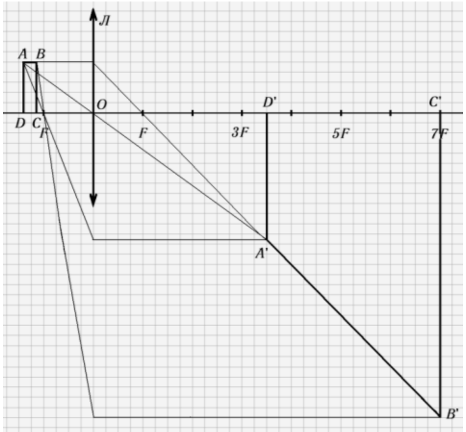
$$CD = OD - OC = \left(\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} - \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2}\right) \cdot F = \frac{3{,}5}{15} \cdot F.$$ **(3 балла)**

3. Определим длину отрезка *C'D'*:

$$OD' = (\Gamma_1 + 1) \cdot F,\ OC' = (\Gamma_2 + 1) \cdot F,$$

$$C'D' = OC' - OD' = (\Gamma_2 + 1 - \Gamma_1 - 1) \cdot F = (\Gamma_2 - \Gamma_1) \cdot F = 3{,}5 \cdot F.$$ **(3 балла)**

4. Изображение *A'B'C'D'* прямоугольника *ABCD* является трапецией (см. рисунок).



(5 баллов)

54. Площадь прямоугольника *ABCD*:

$$S_{\text{ABCD}} = AD \cdot CD = a \cdot \left(\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} - \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} \right) \cdot F = \left(\frac{\Gamma_2 - \Gamma_1}{\Gamma_1 \cdot \Gamma_2} \right) \cdot aF = \frac{3{,}5}{15} \cdot aF$$

. **(2 балла)**

Площадь трапеции *A'B'C'D'*:

$$S_{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} = \frac{A'D' + B'C'}{2} \cdot C'D' = \frac{a(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2} \cdot (\Gamma_2 - \Gamma_1) \cdot F = \frac{(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)}{2} \cdot aF = 14{,}875 \cdot aF$$

(3 балла)

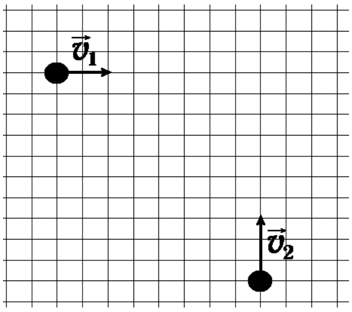
6. Окончательно, отношение площадей изображения и прямоугольника:

$$\frac{S_{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'}}{S_{\text{ABCD}}} = \frac{(\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2)}{2} \cdot aF \cdot \left(\frac{\Gamma_1 \cdot \Gamma_2}{\Gamma_2 - \Gamma_1} \right) \cdot \frac{1}{aF} = \frac{\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot (\Gamma_2 + \Gamma_1)}{2} = 63{,}75.$$

(2 балла)

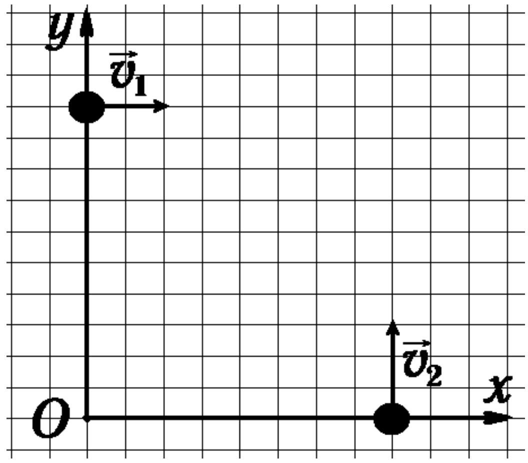
Ответ: $\frac{S_{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'}}{S_{\text{ABCD}}} = 63{,}75.$

2. Два морских корабля идут с постоянными скоростями взаимно перпендикулярными курсами, как показано на рисунке. Цена одной клетки на рисунке – одна морская миля. Скорость первого корабля 8 миль/час, второго – 10 миль/час. Определите, с каким минимальным постоянным и одинаковым для обоих кораблей ускорением (в милях/час^2) должны начать двигаться корабли, чтобы, когда они окажутся на одной прямой (по вертикали или по горизонтали), расстояние между ними составило не менее одной морской мили. Рассмотрите ситуацию, когда первый корабль первым проходит точку пересечения траекторий движения кораблей. Ответ округлите до десятых долей.



Решение

Введём начальные координаты кораблей: первый корабль (0; 10), второй корабль (8; 0). **(2 балла)**



Возможны 2 варианта положений кораблей, удовлетворяющих условию:

1) первый корабль (8; 10), второй корабль (8; 9) $\Delta x_1 = 8$ миль; $\Delta y_2 = 9$ миль;

2) первый корабль (9; 10), второй корабль (8; 10) $\Delta x_1 = 9$ миль; $\Delta y_2 = 10$ миль.

(2 балла)

Для реализации этого варианта первый корабль должен ускориться, а второй замедлиться. При этом, сначала реализуется первый вариант положений кораблей, а через некоторое время – второй:

$$\Delta x_1 = v_{01}t + \frac{at^2}{2}, \qquad \Delta y_2 = v_{02}t - \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$ **(2 балла)**

Выразим время, удовлетворяющее этим ситуациям:

$$\frac{at^2}{2} = \Delta x_1 - v_{01}t, \qquad \frac{at^2}{2} = v_{02}t - \Delta y_2, \qquad (2)$$

$$\Delta x_1 - v_{01}t = v_{02}t - \Delta y_2,\ \Delta y_2 + \Delta x_1 = v_{02}t + v_{01}t = (v_{02} + v_{01}) \cdot t,$$

$$t = \frac{\Delta y_2 + \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}}$$ **(4 балла)**

Для нахождения ускорения, подставим время в любое из уравнений (2) (возможен любой из вариантов, представленных ниже):

$$a = \frac{2(\Delta x_1 - v_{01}t)}{t^2} = 2\left(\Delta x_1 - v_{01} \cdot \frac{\Delta y_2 + \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}}\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{v_{02} \cdot \Delta x_1 + v_{01} \cdot \Delta x_1 - v_{01} \cdot \Delta y_2 - v_{01} \cdot \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}}\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$ **(6 баллов)**

$$= 2\frac{(v_{02} \cdot \Delta x_1 - v_{01} \cdot \Delta y_2) \cdot (v_{02} + v_{01})}{(\Delta y_2 + \Delta x_1)^2}$$

ИЛИ

$$a = \frac{2(v_{02}t - \Delta y_2)}{t^2} = 2\left(v_{02} \cdot \frac{\Delta y_2 + \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}} - \Delta y_2\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{v_{02} \cdot \Delta y_2 + v_{02} \cdot \Delta x_1 - v_{02} \cdot \Delta y_2 - v_{01} \cdot \Delta y_2}{v_{02} + v_{01}}\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$ **(6 баллов)**

$$= 2\frac{(v_{02} \cdot \Delta x_1 - v_{01} \cdot \Delta y_2) \cdot (v_{02} + v_{01})}{(\Delta y_2 + \Delta x_1)^2}$$

Подставим числовые данные:

– вариант первый: $a = 2\frac{(10 \cdot 8 - 8 \cdot 9) \cdot (10 + 8)}{(9 + 8)^2} = 0{,}996 \approx 1$ миля/час^2; **(2 балла)**

– вариант второй: $a = 2\frac{(10 \cdot 9 - 8 \cdot 10) \cdot (10 + 8)}{(10 + 9)^2} = 0{,}997 \approx 1$ миля/час^2. **(2 балла)**

В итоге, если корабли будут идти с минимальным ускорением 1 миля/час^2, расстояние между ними не окажется меньше 1 мили.

Ответ: $a \approx 1$ миля/час^2.

3. В двух калориметрах находится вода разной массы и разной температуры. В первом налито 3 кг воды с температурой 10°C, во втором налито 4 кг воды с температурой 90°C. Во втором калориметре находится еще алюминиевый брусок массой 1 кг. Брусок вынимают из второго калориметра и помещают в первый, где его держат до установления теплового равновесия. После этого брусок возвращают во второй калориметр, где также держат до установления теплового равновесия (этим заканчивается цикл опыта). Сколько таких циклов надо проделать, чтобы разница температур воды в калориметрах стала меньше 5°C? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°C), удельная теплоемкость алюминия 900 Дж/(кг·°C).

Решение

Пусть m1 – масса воды в первом сосуде, m2 – масса воды во втором сосуде, m – масса алюминиевого бруска, Св – удельная теплоемкость воды, С – удельная теплоемкость алюминия, t_{01} – температура воды в первом сосуде в начале цикла, t_{02} – температура воды во втором сосуде в начале цикла, t_1 – температура воды в первом сосуде в конце цикла, t_2 – температура воды во втором сосуде в конце цикла. Уравнение теплового баланса для первого сосуда в первой части цикла

$$m_1 \cdot C_B \cdot (t_1 - t_{01}) = m \cdot C \cdot (t_{02} - t_1)$$ **(2 балла)**

Откуда

$$t_1 = \frac{m_1 \cdot C_B \cdot t_{01} + m \cdot C \cdot t_{02}}{m_1 \cdot C_B + m \cdot C}$$ **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для второго сосуда во второй части цикла

$$m_2 \cdot C_B \cdot \left(t_{02} - t_2\right) = m \cdot C \cdot \left(t_2 - t_1\right)$$ **(2 балла)**

Откуда

$$t_2 = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot t_{02} + m \cdot C \cdot t_1}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C}$$ **(2 балла)**

Разность температур воды в сосудах после цикла

$$t_2 - t_1 = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot t_{02} + m \cdot C \cdot t_1}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} - t_1 = \frac{m_2 \cdot C_B}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} \cdot \left(t_{02} - t_1\right) =$$
$$= \frac{m_2 \cdot C_B}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} \cdot \left(t_{02} - \frac{m_1 \cdot C_B \cdot t_{01} + m \cdot C \cdot t_{02}}{m_1 \cdot C_B + m \cdot C}\right) = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot m_1 \cdot C_B}{\left(m_2 \cdot C_B + m \cdot C\right) \cdot \left(m_1 \cdot C_B + m \cdot C\right)} \cdot \left(t_{02} - t_{01}\right)$$
(2 балла)

Подстановка числовых значений (m1 = 3 кг, m2 = 4 кг, m = 1 кг, Св = 4200 Дж/(кг·°C), C = 900 Дж/(кг·°C)) приводит к выражению

$$t_2 - t_1 = 0,886 \cdot \left(t_{02} - t_{01}\right)$$ **(2 балла)**

Формула показывает, что разности температур воды после каждого цикла образуют геометрическую прогрессию. Через n циклов эта разность будет

$$t_2 - t_1 = 0,886^n \cdot \left(90 - 10\right) = 80 \cdot 0,886^n$$ **(2 балла)**

Согласно условию задачи

$$t_2 - t_1 \le 5 \Rightarrow 80 \cdot 0,886^n \le 5 \Rightarrow 0,886^n \le \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$ **(2 балла)**

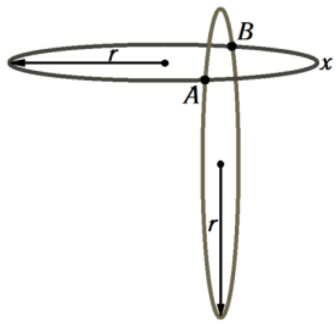
Решение неравенства

$$\ln\left(0,886^n\right) \le -\ln\left(16\right) \Rightarrow n \ge \frac{-\ln\left(16\right)}{\ln\left(0.886\right)} = 22,91$$ **(2 балла)**

Наименьшее целое решение неравенства – 23. Разница температур воды в сосудах будет меньше 5°С после 23 циклов. **(2 балла)**

Ответ: 23 цикла

4. Два проволочных кольца одинакового радиуса выполнены из одного материала и имеют одинаковые поперечные сечения. Плоскости колец взаимно перпендикулярны (см. рисунок). Определите во сколько раз сопротивление участка между точками *A* и *B* меньше сопротивления одного кольца. Длина дуги ***x*** на рисунке равна 1/4 длины кольца.



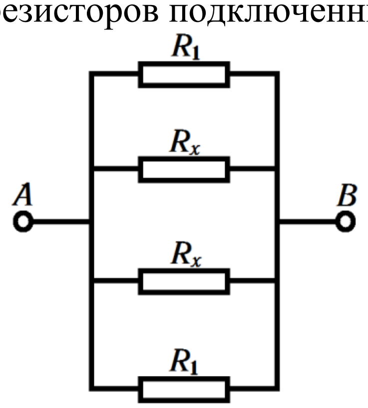
Решение:

1) Так как радиусы колец одинаковы, то длина правой дуги *AB* горизонтального кольца, равна длине верхней дуги *AB* вертикального кольца и равна *x*. **(2 балла)**

2) Сопротивление проводника определяется через его длину и площадь поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{s}.$$ **(2 балла)**

3) Сопротивление участка электрической цепи между точками *A* и *B* будет определяться как сопротивление 4 резисторов подключенных параллельно.



(4 балла)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_x} = \frac{2(R_x + R_1)}{R_1 \cdot R_x}, \qquad R = \frac{R_1 \cdot R_x}{2(R_x + R_1)},$$ **(2 балла)**

где $$R_x = \rho \frac{x}{s}, \qquad R_1 = \rho \frac{(2\pi r - x)}{s}.$$ **(2 балла)**

4) Получили зависимость *R*(*x*): $R = \dfrac{\rho}{2s} \dfrac{(2\pi r - x) \cdot x}{((2\pi r - x) + x)} = \dfrac{\rho}{4\pi r s} \cdot (2\pi r - x) \cdot x.$

(2 балла)

5) Подставим значение $x = 2\pi r/4 = \pi r/2$, и получим:

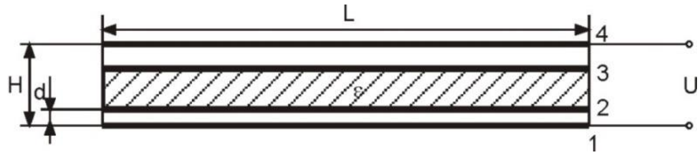
$$R = \frac{\rho}{4\pi r s} \cdot \left(2\pi r - \frac{\pi r}{2}\right) \cdot \frac{\pi r}{2} = \frac{\rho}{4\pi r s} \cdot \frac{3\pi^2 r^2}{4} = \frac{3\rho\pi r}{16 s}.$$ **(2 балла)**

6) Сопротивление одного кольца: $R_0 = \rho \dfrac{2\pi r}{s}.$ **(2 балла)**

7) Найдём отношение $\dfrac{R_0}{R} = \dfrac{2\rho\pi r}{s} \cdot \dfrac{16s}{3\rho\pi r} = \dfrac{32}{3} \approx 10{,}67$ раза. **(2 балла)**

Ответ: $\dfrac{R_0}{R} = \dfrac{32}{3} \approx 10{,}67$ раза

5. В вакууме находится открытая коробочка – прямоугольный параллелепипед с размерами основания $\boldsymbol{L \times L}$ = 10×10 см и высотой $\boldsymbol{H}$ = 1 см. На нижнем основании коробочки находится тонкая металлическая пластина 1, полностью закрывающая основание. На высоте $\boldsymbol{d}$ = 2 мм от пластины 1 в коробочке закреплена металлическая пластина 2, полностью перекрывающая коробочку. На пластину 2 налит слой жидкого диэлектрика толщиной 4 мм с диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 4. На диэлектрике сверху лежит такая же металлическая пластина 3, которая может двигаться в коробочке (см. рис.). Коробочка сверху закрыта такой же металлической пластиной 4. На нижнюю и верхнюю пластины подано напряжение $\boldsymbol{U}$ = 400 КВ, Между пластинами 2 и 3 начинают закачивать такой же жидкий диэлектрик, в результате чего пластина 3 поднимается. Какой объем диэлектрика надо закачать, чтобы в нем произошел пробой? Пробой происходит, когда напряженность электрического поля в диэлектрике составляет 20 КВ/мм.



Решение:

Изображенную на рис. 1 схему можно представить как набор конденсаторов, соединенных последовательно (см. рис.2):

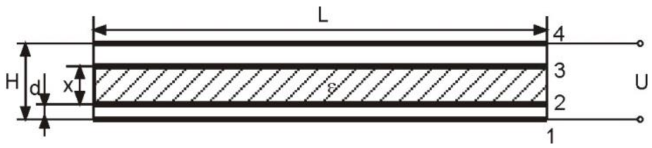


Рис. 1

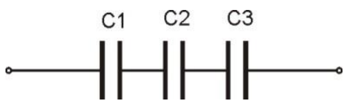


Рис. 2 **(4 балла)**

Если x – толщина слоя диэлектрика, то емкости конденсаторов определяются так:

$$C1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot L^2}{d}; C2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2}{x}; C3 = \frac{\varepsilon_0 \cdot L^2}{H-d-x}$$ **(2 балла)**

Здесь ε_0 – электрическая постоянная.

Полная емкость всей батареи конденсаторов определяется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} = \frac{d}{\varepsilon_0 \cdot L^2} + \frac{x}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2} + \frac{H-d-x}{\varepsilon_0 \cdot L^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot L^2} \cdot \left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)$$ **(2 балла)**

Полный заряд батареи (он же – заряд каждого элемента батареи, т. к. они соединены последовательно)

$$Q = C \cdot U = \frac{U \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{\left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)}$$ **(2 балла)**

Напряжение на емкости С2

$$U2 = \frac{Q}{C2} = \frac{U \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{\left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right)} \cdot \frac{x}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2} = \frac{U \cdot x}{\varepsilon \cdot H - x(\varepsilon - 1)}$$ **(2 балла)**

Согласно условию задачи Н = 10 мм, ε = 4, U = 400 КВ. Предельное напряжение U2 определяется так (x – в мм):

$U2 = E \cdot x = 20x$ КВ **(2 балла)**

Подстановка приводит к уравнению для определения x:

$$20x = \frac{400x}{4 \cdot 10 - x \cdot 3}$$ **(2 балла)**

Отсюда x = 20/3 = 6,7 мм. **(2 балла)**

Начальная толщина диэлектрика 4 мм, его уровень поднялся на 2,7 мм. Объем закачанного диэлектрика будет 10·10·0,27 = 27 см^3. **(2 балла)**

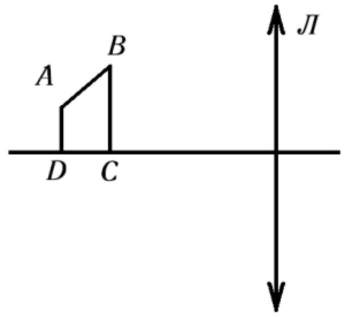
Ответ: 27 см^3.

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада
2023-2024
ФИЗИКА
11 класс

II этап

Вариант 2

1. Трапеция *ABCD* располагается так, что отрезок *CD* лежит на главной оптической оси, а отрезки *BC* и *AD* перпендикулярны главной оптической оси тонкой линзы (см. рис). Изображение отрезка *AD* оказалось в $\Gamma_1 = 1{,}2$ раза больше, а отрезка *BC* – в $\Gamma_2 = 4$ раза больше. Определите во сколько раз площадь изображения, полученного при помощи линзы, больше площади трапеции *ABCD*, если $BC = 2\cdot AD$. Ответ запишите с точностью до сотых долей.



Решение

1. Обозначим $AD = a$, а центр линзы точкой *O*.

В условии задачи не сказано, какая используется линза (собирающая или рассеивающая) и как относительно фокуса располагаются точки *C* и *D*. Т.к. по условию задачи линейные увеличения $\Gamma_2 > \Gamma_1 > 1$, то можно сделать однозначный вывод, что линза собирающая, а точки *C* и *D* лежат между первым и вторым фокусом. Рассеивающая линза даёт уменьшенные мнимые изображения (что противоречит $\Gamma_1 > 1$, $\Gamma_2 > 1$). Если бы точки *C* и *D* лежали между собирающей линзой и первым фокусом, то Γ_1 должно было быть больше Γ_2 (что противоречит $\Gamma_2 > \Gamma_1$). Если бы точки *C* и *D* лежали от собирающей линзы дальше второго фокуса, изображения были бы уменьшенными (что противоречит $\Gamma_1 > 1, \Gamma_2 > 1$). **(2 балла)**

2. Для начала, определим длину отрезка *CD*. Воспользуемся формулами линейного увеличения и тонкой собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{OD'}, \text{ где } \Gamma_1 = \frac{A'D'}{AD} = \frac{OD'}{OD},\ OD' = OD \cdot \Gamma_1,$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OD} + \frac{1}{\Gamma_1 \cdot OD} = \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1 \cdot OD},\ OD = \frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} \cdot F .$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{OC'}, \text{ где } \Gamma_2 = \frac{B'C'}{BC} = \frac{OC'}{OC},\ OC' = OC \cdot \Gamma_2,$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{OC} + \frac{1}{\Gamma_2 \cdot OC} = \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2 \cdot OC},\ OC = \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2} \cdot F .$$

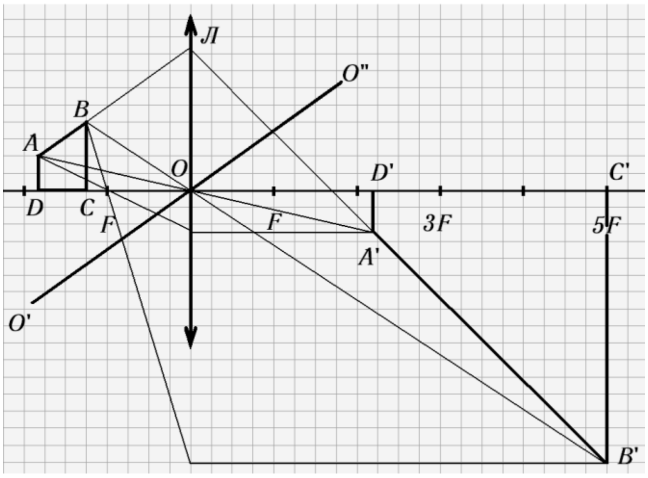
$$CD = OD - OC = \left(\frac{\Gamma_1 + 1}{\Gamma_1} - \frac{\Gamma_2 + 1}{\Gamma_2}\right) \cdot F = \frac{7}{12} \cdot F .$$ **(3 балла)**

3. Определим длину отрезка *C'D'*:

$$OD' = (\Gamma_1 + 1) \cdot F,\ OC' = (\Gamma_2 + 1) \cdot F,$$

$$C'D' = OC' - OD' = (\Gamma_2 + 1 - \Gamma_1 - 1) \cdot F = (\Gamma_2 - \Gamma_1) \cdot F = \frac{14}{5} \cdot F .$$ **(3 балла)**

4. Изображение *A'B'C'D'* трапеции *ABCD* тоже является трапецией (см. рисунок).



(5 баллов)

5. Площадь трапеции *ABCD*:

$$S_{\text{ABCD}} = \frac{(AD+BC)}{2}\cdot CD = \frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{\Gamma_1+1}{\Gamma_1}-\frac{\Gamma_2+1}{\Gamma_2}\right)\cdot F = = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\Gamma_2-\Gamma_1}{\Gamma_1\cdot\Gamma_2}\right)\cdot aF = \frac{7}{8}\cdot aF.$$ **(2 балла)**

Площадь трапеции *A'B'C'D'*:

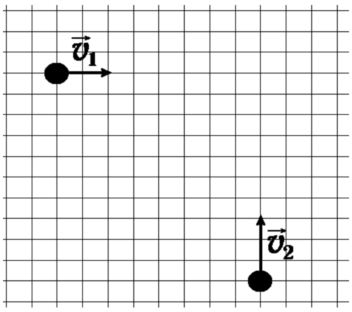
$$S_{\text{A'B'C'D'}} = \frac{A'D'+B'C'}{2}\cdot C'D' = \frac{a(\Gamma_1+2\Gamma_2)}{2}\cdot(\Gamma_2-\Gamma_1)\cdot F = = \frac{322}{25}\cdot aF$$ **(3 балла)**

6. Окончательно, отношение площадей изображения и трапеции:

$$\frac{S_{\text{A'B'C'D'}}}{S_{\text{ABCD}}} = \frac{(\Gamma_1+2\Gamma_2)(\Gamma_2-\Gamma_1)}{2}\cdot aF\cdot\left(\frac{\Gamma_1\cdot\Gamma_2}{\Gamma_2-\Gamma_1}\right)\cdot\frac{2}{3aF} = = \frac{\Gamma_1\cdot\Gamma_2\cdot(\Gamma_1+2\Gamma_2)}{3} = 14{,}72.$$ **(2 балла)**

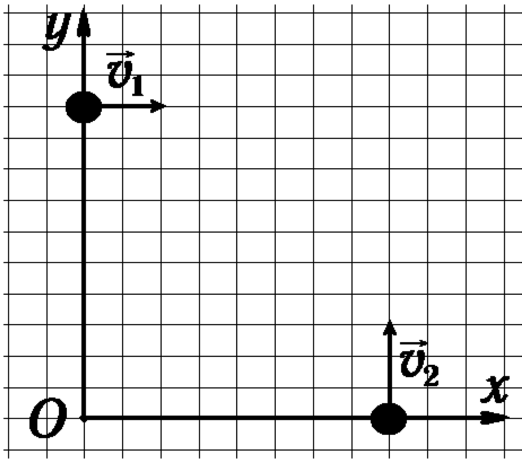
Ответ: $\frac{S_{\text{A'B'C'D'}}}{S_{\text{ABCD}}} = 14{,}72.$

2. Два морских корабля идут с постоянными скоростями взаимно перпендикулярными курсами, как показано на рисунке. Цена одной клетки на рисунке – одна морская миля. Скорость первого корабля 8 миль/час, второго – 10 миль/час. Определите, с каким минимальным постоянным и одинаковым для обоих кораблей ускорением (в милях/час^2) должны начать двигаться корабли, чтобы, когда они окажутся на одной прямой (по вертикали или по горизонтали), расстояние между ними составило не менее одной морской мили. Рассмотрите ситуацию, когда второй корабль первым проходит точку пересечения траекторий движения кораблей. Ответ округлите до сотых долей.



Решение

Введём начальные координаты кораблей: первый корабль (0; 10), второй корабль (8; 0). **(2 балла)**



Возможны 2 варианта положений кораблей, удовлетворяющих условию:

1) первый корабль (7; 10), второй корабль (8; 10) $\Delta x_1 = 7$ миль; $\Delta y_2 = 10$ миль; 2) первый корабль (8; 10), второй корабль (8; 11) $\Delta x_1 = 8$ миль; $\Delta y_2 = 11$ миль.

(2 балла)

Для реализации этого варианта первый корабль должен замедлиться, а второй ускориться. При этом, сначала реализуется первый вариант положений кораблей, а через некоторое время – второй:

$$\Delta x_1 = v_{01}t - \frac{at^2}{2}, \qquad \Delta y_2 = v_{02}t + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

(2 балла)

Выразим время, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{at^2}{2} = v_{01}t - \Delta x_1, \qquad \frac{at^2}{2} = \Delta y_2 - v_{02}t, \qquad (2)$$

$$v_{01}t - \Delta x_1 = \Delta y_2 - v_{02}t,\ \Delta y_2 + \Delta x_1 = v_{02}t + v_{01}t = (v_{02} + v_{01}) \cdot t,$$

$$t = \frac{\Delta y_2 + \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}}$$

(4 балла)

Для нахождения ускорения, подставим время в любое из уравнений (2) (возможен любой из вариантов, представленных ниже):

$$a = \frac{2(v_{01}t - \Delta x_1)}{t^2} = 2\left(v_{01} \cdot \frac{\Delta y_2 + \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}} - \Delta x_1\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$

$$= 2\left(\frac{v_{01} \cdot \Delta y_2 + v_{01} \cdot \Delta x_1 - v_{02} \cdot \Delta x_1 - v_{01} \cdot \Delta x_1}{v_{02} + v_{01}}\right) \cdot \left(\frac{v_{02} + v_{01}}{\Delta y_2 + \Delta x_1}\right)^2 =$$

$$= 2\frac{(v_{01} \cdot \Delta y_2 - v_{02} \cdot \Delta x_1) \cdot (v_{02} + v_{01})}{(\Delta y_2 + \Delta x_1)^2}$$

(6 баллов)

ИЛИ

$$a=\frac{2(\Delta y_2-v_{02}t)}{t^2}=2\left(\Delta y_2-v_{02}\cdot\frac{\Delta y_2+\Delta x_1}{v_{02}+v_{01}}\right)\cdot\left(\frac{v_{02}+v_{01}}{\Delta y_2+\Delta x_1}\right)^2=$$

$$=2\left(\frac{v_{02}\cdot\Delta y_2+v_{01}\cdot\Delta y_2-v_{02}\cdot\Delta y_2-v_{02}\cdot\Delta x_1}{v_{02}+v_{01}}\right)\cdot\left(\frac{v_{02}+v_{01}}{\Delta y_2+\Delta x_1}\right)^2=$$

$$=2\frac{(v_{01}\cdot\Delta y_2-v_{02}\cdot\Delta x_1)\cdot(v_{02}+v_{01})}{(\Delta y_2+\Delta x_1)^2}$$

(6 баллов)

Подставим числовые данные:

– вариант первый: $a=2\frac{(8\cdot 10-10\cdot 7)\cdot(10+8)}{(10+7)^2}=1{,}246\approx 1{,}25$ миль/час^2. **(2 балла)**

– вариант второй: $a=2\frac{(8\cdot 11-10\cdot 8)\cdot(10+8)}{(11+8)^2}=0{,}7977\approx 0{,}80$ миль/час^2; **(2 балла)**

В итоге, минимальное ускорение, при котором реализуются оба условия, что расстояние по вертикали или по горизонтали между кораблями не окажется меньше 1 морской мили, равно 1,25 миль/час^2.

Ответ: $a\approx 1{,}25$ миль/час^2.

3. В двух калориметрах находится вода разной массы и разной температуры. В первом налито 3 кг холодной воды, во втором налито 4 кг горячей воды. Во втором калориметре находится еще алюминиевый брусок массой 1 кг. Брусок вынимают из второго калориметра и помещают в первый, где его держат до установления теплового равновесия. После этого брусок возвращают во второй калориметр, где также держат до установления теплового равновесия (этим заканчивается цикл опыта). Через 20 таких циклов разница температур воды в калориметрах составила 5°С. Чему была равна начальная температура воды во втором сосуде, если начальная температура воды в первом сосуде была равна 10°С? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг·°С), удельная теплоемкость алюминия 900 Дж/(кг·°С).

Решение

Пусть m1 – масса воды в первом сосуде, m2 – масса воды во втором сосуде, m – масса алюминиевого бруска, Св – удельная теплоемкость воды, С – удельная теплоемкость алюминия, t_{01} – температура воды в первом сосуде в начале цикла, t_{02} – температура воды во втором сосуде в начале цикла, t_1 – температура воды в первом сосуде в конце цикла, t_2 – температура воды во втором сосуде в конце цикла. Уравнение теплового баланса для первого сосуда в первой части цикла

$$m_1\cdot C_B\cdot(t_1-t_{01})=m\cdot C\cdot(t_{02}-t_1)$$ **(2 балла)**

Откуда

$$t_1=\frac{m_1\cdot C_B\cdot t_{01}+m\cdot C\cdot t_{02}}{m_1\cdot C_B+m\cdot C}$$ **(2 балла)**

Уравнение теплового баланса для второго сосуда во второй части цикла

$$m_2 \cdot C_B \cdot (t_{02} - t_2) = m \cdot C \cdot (t_2 - t_1)$$ **(2 балла)**

Откуда

$$t_2 = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot t_{02} + m \cdot C \cdot t_1}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C}$$ **(2 балла)**

Разность температур воды в сосудах после цикла

$$t_2 - t_1 = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot t_{02} + m \cdot C \cdot t_1}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} - t_1 = \frac{m_2 \cdot C_B}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} \cdot (t_{02} - t_1) =$$

$$= \frac{m_2 \cdot C_B}{m_2 \cdot C_B + m \cdot C} \cdot \left(t_{02} - \frac{m_1 \cdot C_B \cdot t_{01} + m \cdot C \cdot t_{02}}{m_1 \cdot C_B + m \cdot C} \right) = \frac{m_2 \cdot C_B \cdot m_1 \cdot C_B}{(m_2 \cdot C_B + m \cdot C) \cdot (m_1 \cdot C_B + m \cdot C)} \cdot (t_{02} - t_{01})$$ **(2 балла)**

Подстановка числовых значений (m1 = 3 кг, m2 = 4 кг, m = 1 кг, Св = 4200 Дж/(кг·°С), С = 900 Дж/(кг·°С)) приводит к выражению

$$t_2 - t_1 = 0{,}886 \cdot (t_{02} - t_{01})$$ **(2 балла)**

Формула показывает, что разности температур воды после каждого цикла образуют геометрическую прогрессию. Через 20 циклов эта разность будет

$$t_2 - t_1 = 0{,}886^{20} \cdot (t_{H2} - t_{H1}),$$ **(2 балла)**

где t_{H2} – начальная температура воды во втором сосуде, t_{H1} – начальная температура воды в первом сосуде.

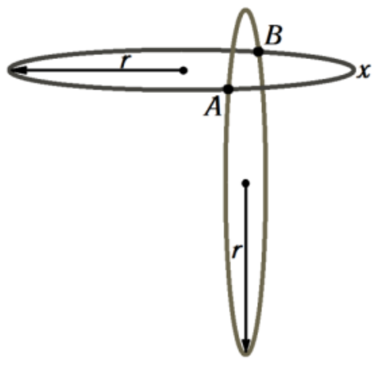
Согласно условия задачи

$$t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow (t_{H2} - t_{H1}) \cdot 0{,}886^{20} = 5 \Rightarrow t_{H2} - t_{H1} = \frac{5}{0{,}886^{20}} = 56{,}3^0 C$$ **(2 балла)**

Так как по условию задачи начальная температура воды в первом сосуде была 10°С, то начальная температура воды во втором сосуде 10 + 56,3 = 66,3°С. **(4 балла)**

Ответ: 66,3°С

4. Два проволочных кольца одинакового радиуса выполнены из одного материала и имеют одинаковые поперечные сечения. Плоскости колец взаимно перпендикулярны (см. рисунок). Определите во сколько раз сопротивление участка между точками *A* и *B* меньше сопротивления одного кольца. Длина дуги *x* на рисунке равна 1/3 длины кольца.



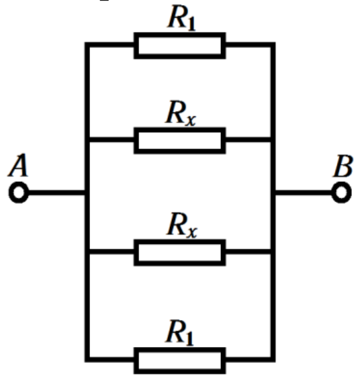
Решение:

1) Так как радиусы колец одинаковы, то длина правой дуги *AB* горизонтального кольца, равна длине верхней дуги *AB* вертикального кольца и равна *x*. **(2 балла)**

2) Сопротивление проводника определяется через его длину и площадь поперечного сечения:

$$R = \rho \frac{l}{s}. \quad \textbf{(2 балла)}$$

3) Сопротивление участка электрической цепи между точками *A* и *B* будет определяться как сопротивление 4 резисторов подключенных параллельно.



(4 балла)

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_x} = \frac{2(R_x + R_1)}{R_1 \cdot R_x}, \qquad R = \frac{R_1 \cdot R_x}{2(R_x + R_1)}, \quad \textbf{(2 балла)}$$

где

$$R_x = \rho \frac{x}{s}, \qquad R_1 = \rho \frac{(2\pi r - x)}{s}.$$

(2 балла)

4) Получили зависимость *R*(*x*): $R = \dfrac{\rho}{2s} \dfrac{(2\pi r - x)\cdot x}{((2\pi r - x) + x)} = \dfrac{\rho}{4\pi r s} \cdot (2\pi r - x) \cdot x$.

(2 балла)

5) Подставим значение *x* = 2π*r*/3, и получим:

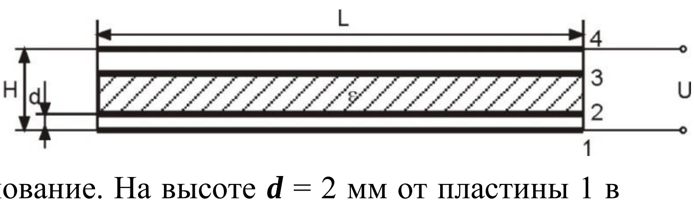
$$R = \frac{\rho}{4\pi r s} \cdot \left(2\pi r - \frac{2\pi r}{3}\right) \cdot \frac{2\pi r}{3} = \frac{\rho}{4\pi r s} \cdot \frac{8\pi^2 r^2}{9} = \frac{8\rho\pi r}{9s}. \quad \textbf{(2 балла)}$$

6) Сопротивление одного кольца: $R_0 = \rho \dfrac{2\pi r}{s}$. **(2 балла)**

7) Найдём отношение $\dfrac{R_0}{R} = \dfrac{2\rho\pi r}{s} \cdot \dfrac{9s}{2\rho\pi r} = 9$ раз. **(2 балла)**

Ответ: $\dfrac{R_0}{R} = 9$ раз

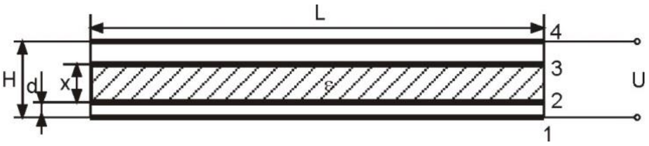
5. В вакууме находится открытая коробочка – прямоугольный параллелепипед с размерами основания $\boldsymbol{L \times L}$ = 10×10 см и высотой $\boldsymbol{H}$ = 1 см. На нижнем основании коробочки находится тонкая металлическая пластина 1, полностью закрывающая основание. На высоте $\boldsymbol{d}$ = 2 мм от пластины 1 в коробочке закреплена металлическая пластина 2, полностью перекрывающая коробочку. На пластину 2 налит слой жидкого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 4. На диэлектрике сверху лежит такая же металлическая пластина 3, которая может двигаться в коробочке (см. рис.). Коробочка сверху закрыта такой же металлической пластиной 4. На нижнюю и верхнюю пластины подано напряжение **U** = 400 КВ, Между пластинами 2 и 3 начинают закачивать такой же жидкий



диэлектрик, в результате чего пластина 3 поднимается. Когда закачали объем 25 см^3, в диэлектрике произошел пробой. Какой толщины был слой диэлектрика до закачки? Пробой происходит, когда напряженность электрического поля в диэлектрике составляет 20 КВ/мм.

Решение:

Изображенную на рис. 1 схему можно представить как набор конденсаторов, соединенных последовательно (см. рис.2):



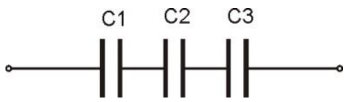


Рис. 1 Рис. 2 **(4 балла)**

Если x – толщина слоя диэлектрика, то емкости конденсаторов определяются так:

$$C1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot L^2}{d}; C2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2}{x}; C3 = \frac{\varepsilon_0 \cdot L^2}{H - d - x}$$ **(2 балла)**

Здесь ε_0 – электрическая постоянная.

Полная емкость всей батареи конденсаторов определяется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C1} + \frac{1}{C2} + \frac{1}{C3} = \frac{d}{\varepsilon_0 \cdot L^2} + \frac{x}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2} + \frac{H - d - x}{\varepsilon_0 \cdot L^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot L^2} \cdot \left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)$$ **(2 балла)**

Полный заряд батареи (он же – заряд каждого элемента батареи, т. к. они соединены последовательно)

$$Q = C \cdot U = \frac{U \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{\left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)}$$ **(2 балла)**

Напряжение на емкости C2

$$U2 = \frac{Q}{C2} = \frac{U \cdot \varepsilon_0 \cdot L^2}{\left(H - x \cdot \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \right)} \cdot \frac{x}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot L^2} = \frac{U \cdot x}{\varepsilon \cdot H - x(\varepsilon - 1)}$$ **(2 балла)**

Согласно условию задачи H = 10 мм, ε = 4, U = 400 КВ. Предельное напряжение U2 определяется так (x – в мм):

$$U2 = E \cdot x = 20x \text{ КВ}$$ **(2 балла)**

Подстановка приводит к уравнению для определения x:

$$20x = \frac{400x}{4 \cdot 10 - x \cdot 3}$$ **(2 балла)**

Отсюда $x = 20/3 = 6{,}7$ мм. **(2 балла)**

Так как закачали 25 см^3 диэлектрика, то его уровень поднялся на $25/(10\cdot 10) = 0{,}25$ см = 2,5 мм.

Начальная толщина диэлектрика будет $6{,}7 - 2{,}5 = 4{,}2$ мм. **(2 балла)**

Ответ: 4,2 мм