Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада (ОРМО)
с международным участием 2024-2025

ФИЗИКА
11 класс. РЕШЕНИЯ
II этап

Вариант 1

1. Два легкоатлета – Антон (А) и Борис (Б) соревнуются в беге на дистанцию длиной ***S***. При этом каждый из них придерживался своей тактики: Антон первую треть пути бежал с постоянным ускорением, вторую треть пути бежал с постоянной скоростью ***v***, а последнюю треть пути замедлялся с тем же ускорением. Борис первую треть времени бежал с постоянным ускорением, вторую треть времени бежал с постоянной скоростью ***v*** (такой же, как и у Антона), а последнюю треть времени замедлялся с таким же ускорением, что и при старте. Кто из спортсменов придёт к финишу первым? На какое время Δt он обгонит соперника?

Решение

1. Пусть время, которое затратили на дистанцию Антон и Борис равно, соответственно, $t_А$ и $t_Б$. Путь, который они проделали, одинаковый.

2. Тактика Антона:

$$S = 2\frac{a_1 t_{A1}^2}{2} + v t_{A2}; \qquad v = a_1 t_{A1}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$\frac{S}{3} = \frac{v t_{A1}}{2}; \qquad \frac{S}{3} = v t_{A2}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_{A1} = \frac{2S}{3v}; \qquad t_{A2} = \frac{S}{3v};$$

$$t_А = 2t_{A1} + t_{A2} = 2\cdot\frac{2S}{3v} + \frac{S}{3v} = \frac{5}{3}\cdot\frac{S}{v}. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

3. Тактика Бориса:

$$S = 2\frac{a_2 t_{Б1}^2}{2} + v t_{Б2}; \qquad v = a_2 t_{Б1}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_{Б1} = t_{Б2} = \frac{t_Б}{3};$$

$$S = 2\frac{v t_Б}{2\cdot 3} + \frac{v t_Б}{3} = \frac{2 v t_Б}{3}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_Б = \frac{3}{2}\cdot\frac{S}{v}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

4. Очевидно, что первым к финишу придёт Борис, т.к. $\frac{5}{3} = 1{,}6667 > 1{,}5$. **(2 балла)**

Он опередит Антона на

$$\Delta t = t_А - t_Б = \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{S}{v} = \frac{1}{6}\cdot\frac{S}{v} \approx 0{,}16667\cdot\frac{S}{v}. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Ответ Борис обгонит Антона на $\Delta t = \frac{1}{6}\cdot\frac{S}{v} \approx 0{,}16667\cdot\frac{S}{v}$

2. Два жонглёра одновременно бросают друг другу мячики с одинаковой начальной скоростью v_0, но под разными углами к горизонту. Определите минимальное расстояние между мячиками в процессе полёта. Расстояние между жонглёрами равно S. Мячики бросают и ловят на одной и той же высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Версия 1: Расстояние между мячиками можно определить:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

где

$$x_1 = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t\,, \qquad x_2 = S - v_0 \cdot \cos\beta \cdot t\,,$$

$$y_1 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}\,, \qquad y_2 = v_0 \cdot \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}\,.$$

$$L = \sqrt{\left(S - v_0 \cdot t \cdot (\cos\beta + \cos\alpha)\right)^2 + v_0^2 \cdot t^2 \cdot (\sin\beta - \sin\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(S - 2v_0 \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + 4v_0^2 \cdot t^2 \cdot \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \quad \textbf{(4 балла)}$$

Учтём, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.к. дальность полёта одинакова (условие навесной и настильной траектории). **(2 балла)**

Доказательство (для решения не обязательно):

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$. Следовательно,

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta, \qquad \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{2(\alpha-\beta)}{2} = 0.$$

Это возможно, когда либо $\cos(\alpha + \beta) = 0$, либо $\sin(\alpha - \beta) = 0$.

Следовательно, $\alpha + \beta = 90^\circ$, или $\alpha - \beta = 0$. А так как, второе равенство противоречит условию, что $\alpha \neq \beta$, то возможно только $\alpha + \beta = 90^\circ$. ЧТД.

Продолжение решения. С учётом того, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, Найдём момент времени t_m, когда расстояние между мячами достигает максимального значения

$$L = \sqrt{\left(S - \sqrt{2}v_0 \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + 2v_0^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t^2 \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 2v_0^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t^2}$$

$$L' = \frac{4v_0^2 t_m - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t_m \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t_m^2}} = 0,$$

$$2v_0 t_m - \sqrt{2}\cdot S\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

$$t_m = \frac{S\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{2}v_0}.$$ **(4 балла)**

Тогда,

$$l^2 = S^2 - 2S^2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + S^2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = S^2\left(1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = S^2\cdot\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{l}{S}.$$ **(2 балла)**

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. **(2 балла)**

Учтём, что $\alpha+\beta = 90^\circ$, $2\alpha = 90^\circ - \beta + \alpha = 90^\circ + 2\frac{\alpha-\beta}{2}$. **(2 балла)**

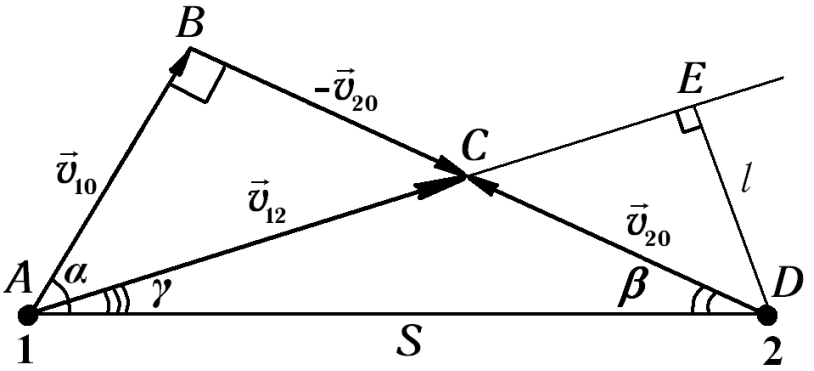
$$S = \frac{v_0^2}{g}\sin\left(90^\circ + 2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}\cos\left(2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(1-\frac{2l^2}{S^2}\right).$$ **(2 балла)**

Выразим искомое минимальное расстояние между мячиками:

$$l = S\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{Sg}{v_0^2}\right)} = \frac{S}{v_0}\sqrt{\frac{v_0^2 - Sg}{2}}.$$ **(2 балла)**

Версия 2: Пусть первый жонглёр бросает мячик под углом α к горизонту, а второй – под углом $\beta < \alpha$. Рассмотрим решение задачи в системе отсчёта связанной с одним из мячиков (для определённости с мячиком, который бросили под более острым углом β к горизонту). Изобразим рисунок.



(7 баллов)

На рисунке: $AB = v_{10} = v_{20} = BC = v_0$, $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$ – скорость первого мячика относительно второго.

Учтём, что $\alpha+\beta = 90^\circ$, т.к. дальность полёта одинакова (условие навесной и настильной траектории). **(3 балла)**

Доказательство (для решения не обязательно):

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$. Следовательно,

$\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, $\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{2(\alpha-\beta)}{2} = 0.$

Это возможно, когда либо $\cos(\alpha+\beta) = 0$, либо $\sin(\alpha-\beta) = 0$.

Следовательно, $\alpha + \beta = 90^\circ$, или $\alpha - \beta = 0$. А так как, второе равенство противоречит условию, что $\alpha \neq \beta$, то возможно только $\alpha + \beta = 90^\circ$. ЧТД.

Продолжение решения.

ΔABC – равнобедренный прямоугольный, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle BAC = 45^\circ$, $\gamma = \alpha - 45^\circ$. **(2 балла)**

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAED:

$l = S \cdot \sin\gamma$. **(2 балла)**

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. **(2 балла)**

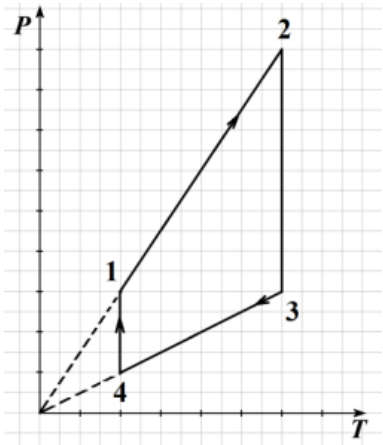
$$S = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\gamma + 90^\circ) = \frac{v_0^2}{g}\cos 2\gamma = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - 2\sin^2\gamma\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \frac{2l^2}{S^2}\right).$$ **(2 балла)**

Выразим искомое минимальное расстояние между мячиками:

$$l = S\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{Sg}{v_0^2}\right)} = \frac{S}{v_0}\sqrt{\frac{v_0^2 - Sg}{2}}.$$ **(2 балла)**

Ответ: $l = S\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{Sg}{v_0^2}\right)} = \frac{S}{v_0}\sqrt{\frac{v_0^2 - Sg}{2}}$.

3. На рисунке приведён график циклического процесса, происходящего с некоторым количеством идеального одноатомного газа. Определите по графику коэффициент полезного действия тепловой машины работающей по данному циклу. Ответ дать в процентах в виде целого числа.



Решение

Для того, чтобы определить КПД цикла, необходимо найти полезную работу за цикл, и поделить на количество теплоты сообщённое газу от нагревателя. Поэтому, разобьем решение этой задачи на этапы.

1. Пусть единичный интервал по шкале температуры будет равен T_0, а по оси давлений – P_0.

Тогда, $T_1 = T_4 = 2T_0$; $T_2 = T_3 = 6T_0$; $P_1 = 3P_0$; $P_2 = 9P_0$; $P_3 = 3P_0$; $P_4 = P_0$. **(2 балла)**

Из графика видно, что процессы 1–2 и 3–4 являются изохорными. Из уравнения состояния идеального газа определим объёмы:

$$V_0 = \frac{\nu R T_0}{P_0}, \qquad V_1 = V_2 = \frac{\nu R T_1}{P_1} = \frac{2\nu R T_0}{3P_0} = \frac{2}{3}V_0,$$

$$V_3 = V_4 = \frac{\nu R T_3}{P_3} = \frac{6\nu R T_0}{3P_0} = 2V_0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

2. Определим процессы, в ходе которых к газу подводится тепло.

Процесс 1–2 изохорный: $A_{12} = 0$,

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 6\nu R T_0 = 6P_0V_0 > 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Процесс 2–3 изотермическое расширение: $\Delta U_{23} = 0$,

$$Q_{23} = A_{23} = \nu R T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 6\nu R T_0 \cdot \ln\left(\frac{2V_0}{\frac{2}{3}V_0}\right) = 6P_0V_0 \cdot \ln 3 > 0,$$

т.к. объём увеличивается. **(2 балла)**

4. Процесс 3–4 изохорный: $A_{34} = 0$,

$$Q_{34} = \Delta U_{34} = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_3) = -6\nu R T_0 = -6P_0V_0 < 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

5. Процесс 4–1 изотермическое сжатие: $\Delta U_{41} = 0$;

$$Q_{41} = A_{41} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = 2\nu R T_0 \ln\left(\frac{\frac{2}{3}V_0}{2V_0}\right) =$$

$$= 2\nu R T_0 \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -2P_0V_0 \ln 3 < 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

6. В итоге, тепло подведённое от нагревателя:

$$Q_{\text{п}} = Q_{12} + Q_{23} = 6(1 + \ln 3) \cdot P_0V_0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Полезная работа, совершённая за цикл:

$$A_{\text{ц}} = A_{23} + A_{41} = (6\ln 3 - 2\ln 3)P_0V_0 = 4\ln 3 \cdot P_0V_0. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

7. КПД цикла:

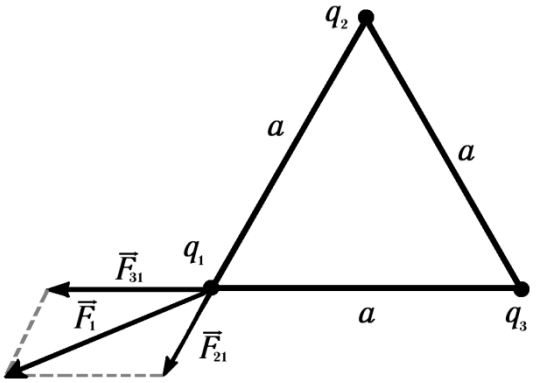
$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{п}}} = \frac{4\ln 3 \cdot P_0V_0}{6(1 + \ln 3) \cdot P_0V_0} = \frac{2\ln 3}{3(1 + \ln 3)} = 0{,}34899, \qquad \textbf{(3 балла)}$$

$$\eta = 35\%.$$

Ответ: $\boxed{\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{п}}} = 35\%}$.

4. Три очень маленьких положительно заряженных шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника. Первый шарик создает в двух оставшихся вершинах треугольника поле с потенциалом $\boldsymbol{\varphi_1}$, второй – $\boldsymbol{\varphi_2}$, третий – $\boldsymbol{\varphi_3}$. Определите результирующую силу $\boldsymbol{F_1}$, с которой на первый шарик действуют второй и третий шарики.

Решение



1. Формулы расчёта потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в двух других вершинах треугольника:

$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{a},\ \varphi_2 = \frac{kq_2}{a},\qquad \varphi_3 = \frac{kq_3}{a}. \qquad (1)$$ **(3 балла)**

2. Формула расчёта силы, действующей на первый заряд со стороны двух других (по теореме косинусов):

$$F_1 = \sqrt{F_{21}^2 + F_{31}^2 + 2F_{21}F_{31}\cdot\cos 60^\circ}. \qquad (2)$$ **(3 балла)**

3. Формулы расчёта сил Кулона, действующих между зарядами в вершинах треугольника:

$$F_{21} = \frac{kq_1q_2}{a^2},\qquad F_{31} = \frac{kq_1q_3}{a^2}. \qquad (3)$$ **(2 балла)**

4. Выразив заряды из (1), подставив в (3), а затем в (2), получим:

$$q_1 = \frac{a\varphi_1}{k},\ q_2 = \frac{a\varphi_2}{k},\qquad q_3 = \frac{a\varphi_3}{k}.$$ **(4 балла)**

$$F_{21} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{k},\qquad F_{31} = \frac{\varphi_1\varphi_3}{k}.$$ **(4 балла)**

$$F_1 = \frac{\varphi_1}{k}\cdot\sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3} = 4\pi\varepsilon_0\varphi_1\cdot\sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3}.$$ **(4 балла)**

Ответ: $\boxed{F_1 = \frac{\varphi_1}{k}\cdot\sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3} = 4\pi\varepsilon_0\varphi_1\cdot\sqrt{\varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_2\varphi_3}}$

5. Воздушный шар объемом 5000 м^3 заполнен водородом при давлении 110 кПа. Он движется на постоянной высоте над землей в воздухе с температурой 43°С и относительной влажностью 10%. Атмосферное давление 100 кПа, температура водорода равна температуре окружающего воздуха. В какой-то момент шар попадает в область с влажностью 90% и начинает снижаться. Какой массы балласт необходимо сбросить с шара, чтобы прекратить снижение? Давление насыщенного пара воды при 43°С равно 9000 Па.

Решение

Масса, которую может поднять воздушный шар, определяют по формуле

$$m_0 = V\cdot\left(\rho_0 - \rho_{водор}\right)$$ **(2 балла)**

где ρ_0 – плотность среды, в которой находится воздушный шар, $\rho_{водор}$ – плотность водорода внутри воздушного шара, V – объем воздушного шара.

Согласно уравнению состояния, плотность газа можно подсчитать по формуле

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{\rho}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{P \cdot M}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

где P – давление газа, M – его молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура газа: T = t + 273, где t – температура по шкале Цельсия.

Плотность водорода

$$\rho_{водор} = \frac{P_{водор} \cdot M_{водор}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Согласно условию задачи, воздушный шар летает в смеси воздуха с давлением $P_{возд}$ и водяного пара с давлением $P_{воды}$. Сумма этих давлений равна атмосферному давлению P_a, которое указано в условии задачи.

Давление водяного пара согласно определению $P_{воды} = P_0 \cdot \varphi$, где P_0 – давление насыщенного водяного пара при температуре задачи, φ - относительная влажность воздуха (в долях единицы). Тогда плотность водяного пара будет

$$\rho_{воды} = \frac{\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Плотность воздуха

$$\rho_{возд} = \frac{P_{возд} \cdot M_{возд}}{R \cdot T} = \frac{\left(P_a - \varphi \cdot P_0\right) \cdot M_{возд}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Общая плотность паро-воздушной смеси

$$\rho_0 = \rho_{воды} + \rho_{возд} = \frac{1}{R \cdot T}\left(\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды} + \left(P_a - \varphi \cdot P_0\right) \cdot M_{возд}\right)$$ **(2 балла)**

После подстановки всех выведенных формул выражение для поднимаемой массы становится таким:

$$m_0 = \frac{V}{R \cdot T}\left(\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды} + \left(P_a - \varphi \cdot P_0\right) \cdot M_{возд} - P_{водор} \cdot M_{водор}\right)$$ **(2 балла)**

Подстановка исходных данных (из условия и справочных) позволяет рассчитать начальную и конечную массы шара:

V = 5000 м^3, T = 43+273 = 316 К, P_0 = 9000 Па, P_a = 100000 Па, $P_{водор}$ = 110000 Па, $M_{водор}$ = 0,002 кг/моль, $M_{воды}$ = 0,018 кг/моль, $M_{возд}$ = 0,029 кг/моль.

А) Начальная влажность φ_1 = 10% = 0,1

$$m_1 = \frac{5000}{8,31 \cdot 316}\left(0,1 \cdot 9000 \cdot 0,018 + \left(100000 - 0,1 \cdot 9000\right) \cdot 0,029 - 110000 \cdot 0,002\right) = 5084 \text{ кг}$$

Б) Конечная влажность φ_2 = 90% = 0,9

$$m_2 = \frac{5000}{8,31 \cdot 316}\left(0,9 \cdot 9000 \cdot 0,018 + \left(100000 - 0,9 \cdot 9000\right) \cdot 0,029 - 110000 \cdot 0,002\right) = 4933 \text{ кг}$$

Для прекращения снижения с шара надо сбросить

$m_1 - m_2 = 5084 - 4933 = 151$ кг балласта **(6 баллов)**

Ответ: 151 кг

Министерство науки и высшего образования РФ
Совет ректоров вузов Томской области
Открытая региональная межвузовская олимпиада (ОРМО)
с международным участием 2024-2025

ФИЗИКА
11 класс. РЕШЕНИЯ
II этап

Вариант 2

1. Два легкоатлета – Антон (А) и Борис (Б) соревнуются в беге на дистанцию длиной ***S***. При этом каждый из них придерживался своей тактики: Антон первую треть пути бежал с постоянным ускорением, вторую треть пути бежал с постоянной скоростью ***v,*** а последнюю треть пути замедлялся с тем же ускорением. Борис первую треть времени бежал с постоянным ускорением, вторую треть времени бежал с постоянной скоростью *v* (такой же, как и у Антона), а последнюю треть времени замедлялся с таким же ускорением, что и при старте. Кто из спортсменов придёт к финишу первым? Определите максимальную скорость ***v*** спортсменов на дистанции, если они финишировали с промежутком времени **Δ*t*.**

Решение

1. Пусть время, которое затратили на дистанцию Антон и Борис равно, соответственно, $t_А$ и $t_Б$. Путь, который они проделали, одинаковый.

2. Тактика Антона:

$$S = 2\frac{a_1 t_{A1}^2}{2} + v t_{A2}; \qquad v = a_1 t_{A1}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$\frac{S}{3} = \frac{v t_{A1}}{2}; \qquad \frac{S}{3} = v t_{A2}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_{A1} = \frac{2S}{3v}; \qquad t_{A2} = \frac{S}{3v};$$

$$t_А = 2t_{A1} + t_{A2} = 2\cdot\frac{2S}{3v} + \frac{S}{3v} = \frac{5}{3}\cdot\frac{S}{v}. \qquad \textbf{(4 балла)}$$

3. Тактика Бориса:

$$S = 2\frac{a_2 t_{Б1}^2}{2} + v t_{Б2}; \qquad v = a_2 t_{Б1}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_{Б1} = t_{Б2} = \frac{t_Б}{3};$$

$$S = 2\frac{v t_Б}{2\cdot 3} + \frac{v t_Б}{3} = \frac{2 v t_Б}{3}; \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$t_Б = \frac{3}{2}\cdot\frac{S}{v}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

4. Очевидно, что первым к финишу придёт Борис, т.к. $\frac{5}{3} = 1{,}6667 > 1{,}5$.

(2 балла)

Он опередит Антона на

$$\Delta t = t_А - t_Б = \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{S}{v} = \frac{1}{6}\cdot\frac{S}{v} \approx 0{,}16667\cdot\frac{S}{v}, \qquad v = \frac{S}{6\Delta t} \qquad \textbf{(4 балла)}$$

Ответ Борис обгонит Антона. Максимальная скорость $v = \frac{S}{6\Delta t}$

2. Два жонглёра одновременно бросают друг другу мячики с одинаковой начальной скоростью, но под разными углами к горизонту. Определите начальные скорости мячиков, если минимальное расстояние между мячиками в процессе полёта равно ***l***. Расстояние между жонглёрами равно ***S***. Мячики бросают и ловят на одной и той же высоте. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение

Версия 1: Расстояние между мячиками можно определить:

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

где

$$x_1 = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t, \qquad x_2 = S - v_0 \cdot \cos\beta \cdot t,$$

$$y_1 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}, \qquad y_2 = v_0 \cdot \sin\beta \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

$$L = \sqrt{\left(S - v_0 \cdot t \cdot (\cos\beta + \cos\alpha)\right)^2 + v_0^2 \cdot t^2 \cdot (\sin\beta - \sin\alpha)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(S - 2v_0 \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + 4v_0^2 \cdot t^2 \cdot \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \quad \textbf{(4 балла)}$$

Учтём, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.к. дальность полёта одинакова (условие навесной и настильной траектории). **(2 балла)**

Доказательство (для решения школьниками не обязательно):

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$. Следовательно,

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta, \qquad \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{2(\alpha-\beta)}{2} = 0.$$

Это возможно, когда либо $\cos(\alpha + \beta) = 0$, либо $\sin(\alpha - \beta) = 0$.

Следовательно, $\alpha + \beta = 90^\circ$, или $\alpha - \beta = 0$. А так как, второе равенство противоречит условию, что $\alpha \neq \beta$, то возможно только $\alpha + \beta = 90^\circ$. ЧТД.

Продолжение решения. С учётом того, что $\alpha + \beta = 90^\circ$, Найдём момент времени t_m, когда расстояние между мячами достигает максимального значения

$$L = \sqrt{\left(S - \sqrt{2}v_0 \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + 2v_0^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t^2 \cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + 2v_0^2 \cdot t^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t^2}$$

$$L' = \frac{4v_0^2 t_m - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sqrt{S^2 - 2\sqrt{2}v_0 \cdot S \cdot t_m \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2v_0^2 t_m^2}} = 0,$$

$$2v_0 t_m - \sqrt{2}\cdot S\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0,$$

$$t_m = \frac{S\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sqrt{2}v_0}.$$ **(4 балла)**

Тогда,

$$l^2 = S^2 - 2S^2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + S^2\cdot\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = S^2\left(1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = S^2\cdot\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{l}{S}.$$ **(2 балла)**

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$. **(2 балла)**

Учтём, что $\alpha+\beta = 90^\circ$, $2\alpha = 90^\circ - \beta + \alpha = 90^\circ + 2\frac{\alpha-\beta}{2}$. **(2 балла)**

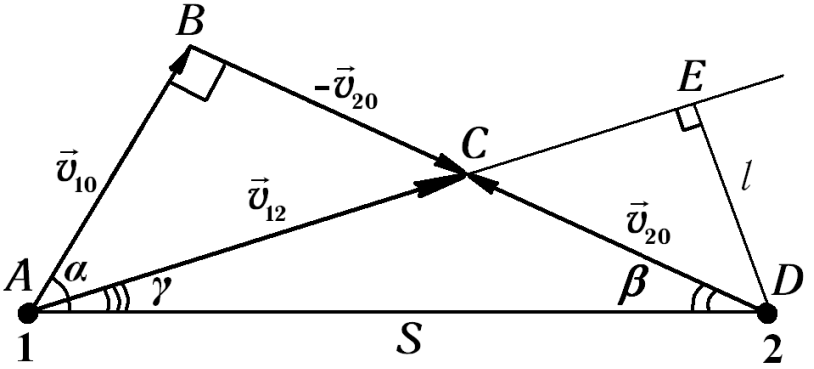
$$S = \frac{v_0^2}{g}\sin\left(90^\circ + 2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}\cos\left(2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \frac{v_0^2}{g}\left(1-2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(1-\frac{2l^2}{S^2}\right).$$ **(2 балла)**

Выразим искомую начальную скорость мячиков:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gS^3}{S^2-2l^2}}.$$ **(2 балла)**

Версия 2: Пусть первый жонглёр бросает мячик под углом α к горизонту, а второй – под углом $\beta < \alpha$. Рассмотрим решение задачи в системе отсчёта связанной с одним из мячиков (для определённости с мячиком, который бросили под более острым углом β к горизонту). Изобразим рисунок.



(7 баллов)

На рисунке: $AB = v_{10} = v_{20} = BC = v_0$, $\vec{v}_{12} = \vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}$ – скорость первого мячика относительно второго.

Учтём, что $\alpha+\beta = 90^\circ$, т.к. дальность полёта одинакова (условие навесной и настильной траектории). **(3 балла)**

Доказательство (для решения школьниками не обязательно):

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$. Следовательно,

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta, \qquad \sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2\cos\frac{2(\alpha+\beta)}{2}\sin\frac{2(\alpha-\beta)}{2} = 0.$$

Это возможно, когда либо $\cos(\alpha+\beta) = 0$, либо $\sin(\alpha-\beta) = 0$.

Следовательно, $\alpha + \beta = 90^\circ$, или $\alpha - \beta = 0$. А так как, второе равенство противоречит условию, что $\alpha \neq \beta$, то возможно только $\alpha + \beta = 90^\circ$. ЧТД.

Продолжение решения.

ΔABC – равнобедренный прямоугольный, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ACB = \angle BAC = 45^\circ$, $\gamma = \alpha - 45^\circ$. **(2 балла)**

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔAED:

$$l = S \cdot \sin\gamma. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Из уравнений кинематики можно получить, что дальность полёта определяется формулой $S = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. **(2 балла)**

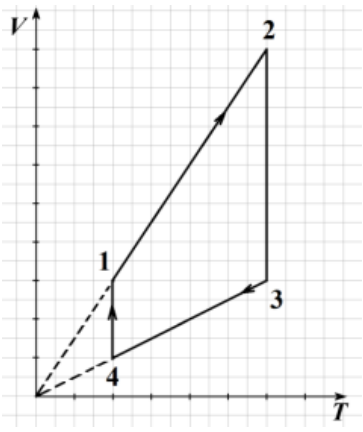
$$S = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\gamma + 90^\circ) = \frac{v_0^2}{g}\cos 2\gamma = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - 2\sin^2\gamma\right) = \frac{v_0^2}{g}\left(1 - \frac{2l^2}{S^2}\right). \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Выразим искомую начальную скорость мячиков:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gS^3}{S^2 - 2l^2}}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Ответ: $v_0 = \sqrt{\frac{gS^3}{S^2 - 2l^2}}$.

3. На рисунке приведён график циклического процесса, происходящего с некоторым количеством идеального одноатомного газа. Определите по графику коэффициент полезного действия тепловой машины работающей по данному циклу. Ответ дать в процентах в виде целого числа.



Решение:

Для того, чтобы определить КПД цикла, необходимо найти полезную работу за цикл, и поделить на количество теплоты, которым обменивается газ с нагревателем. Поэтому, разобьем решение этой задачи на этапы.

1. Пусть единичный интервал по шкале температуры будет равен T_0, а по оси объёмов – V_0.

Тогда, $T_1 = T_4 = 2T_0$; $T_2 = T_3 = 6T_0$; $V_1 = 3V_0$; $V_2 = 9V_0$; $V_3 = 3V_0$; $V_4 = V_0$. **(2 балла)**

Из графика видно, что процессы 1–2 и 3–4 являются изобарными. Из уравнения состояния идеального газа определим давления:

$$P_0 = \frac{\nu R T_0}{V_0}, \qquad P_1 = P_2 = \frac{\nu R T_1}{V_1} = \frac{2\nu R T_0}{3V_0} = \frac{2}{3}P_0,$$

$$P_3 = P_4 = \frac{\nu R T_3}{V_3} = \frac{6\nu R T_0}{3V_0} = 2P_0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

2. Определим процессы, в ходе которых к газу подводится тепло.

Процесс 1–2 изобарный: $A_{12} = P_1(V_2 - V_1) = \frac{2}{3}P_0 \cdot 6V_0 = 4P_0V_0$,

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) = 6\nu R T_0 = 6P_0V_0,$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = 10P_0V_0 > 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

3. Процесс 2–3 изотермическое сжатие: $\Delta U_{23} = 0$,

$$Q_{23} = A_{23} = \nu R T_2 \cdot \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = 6\nu R T_0 \cdot \ln\left(\frac{3V_0}{9V_0}\right) = -6P_0V_0 \cdot \ln 3 < 0,$$

т.к. объём уменьшается. **(2 балла)**

4. Процесс 3–4 изобарный: $A_{34} = P_3(V_4 - V_3) = 2P_0 \cdot (-2V_0) = -4P_0V_0$,

$$\Delta U_{34} = \frac{3}{2}\nu R(T_4 - T_3) = -6\nu R T_0 = -6P_0V_0,$$

$$Q_{34} = \Delta U_{34} + A_{34} = -10P_0V_0 < 0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

5. Процесс 4–1 изотермическое расширение: $\Delta U_{41} = 0$,

$$Q_{41} = A_{41} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right) = 2\nu R T_0 \ln\left(\frac{3V_0}{V_0}\right) = \qquad \textbf{(2 балла)}$$

$$= 2\nu R T_0 \ln 3 = 2P_0V_0 \ln 3 > 0.$$

6. Работа, совершённая за цикл:

$A_{\text{ц}} = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = (4 - 6\ln 3 - 4 + 2\ln 3) \cdot P_0V_0 = -4\ln 3 \cdot P_0V_0$. **(3 балла)**

Видим, что в ходе цикла, газом совершается отрицательная работа. Это означает, что по данному циклу работает «холодильная машина». За счёт работы внешних сил тепло забирается от холодильника и отводится нагревателю.

В итоге, тепло отведённое к нагревателю:

$$Q_{\text{х}} = Q_{23} + Q_{34} = -(10 + 6\ln 3)P_0V_0 = -2(5 + 3\ln 3) \cdot P_0V_0. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

7. КПД цикла:

$$\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{х}}} = \frac{4\ln 3 \cdot P_0V_0}{2(5 + 3\ln 3) \cdot P_0V_0} = \frac{2\ln 3}{5 + 3\ln 3} = 0{,}2648, \qquad \textbf{(3 балла)}$$

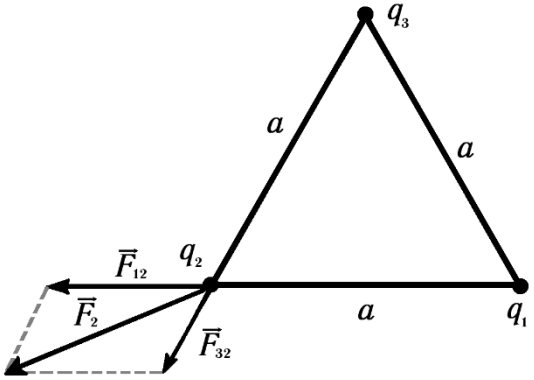
$$\eta = 26\%.$$

Ответ: $\boxed{\eta = \frac{A_{\text{ц}}}{Q_{\text{х}}} = 26\%}$.

4. Три очень маленьких положительно заряженных шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника. Первый шарик создает в двух оставшихся вершинах треугольника

поле с потенциалом φ_1, второй – φ_2, третий – φ_3. Определите результирующую силу F_2, с которой на второй шарик действуют первый и третий шарики.

Решение:



1. Формулы расчёта потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в двух других вершинах треугольника:

$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{a},\ \varphi_2 = \frac{kq_2}{a},\qquad \varphi_3 = \frac{kq_3}{a}. \qquad (1)$$ **(3 балла)**

2. Формула расчёта силы, действующей на второй заряд со стороны двух других (по теореме косинусов):

$$F_2 = \sqrt{F_{12}^2 + F_{32}^2 + 2F_{12}F_{32}\cdot\cos 60^\circ}. \qquad (2)$$ **(3 балла)**

3. Формулы расчёта сил Кулона, действующих между зарядами в вершинах треугольника:

$$F_{12} = \frac{kq_1q_2}{a^2},\qquad F_{32} = \frac{kq_2q_3}{a^2}. \qquad (3)$$ **(2 балла)**

4. Выразив заряды из (1), подставив в (3), а затем в (2), получим:

$$q_1 = \frac{a\varphi_1}{k},\ q_2 = \frac{a\varphi_2}{k},\qquad q_3 = \frac{a\varphi_3}{k}.$$ **(4 балла)**

$$F_{12} = \frac{\varphi_1\varphi_2}{k},\qquad F_{32} = \frac{\varphi_2\varphi_3}{k}.$$ **(4 балла)**

$$F_2 = \frac{\varphi_2}{k}\cdot\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_3} = 4\pi\varepsilon_0\varphi_2\cdot\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_3}.$$ **(4 балла)**

Ответ: $\boxed{F_2 = \frac{\varphi_2}{k}\cdot\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_3} = 4\pi\varepsilon_0\varphi_2\cdot\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_3^2 + \varphi_1\varphi_3}}$

5. Воздушный шар объемом 5000 м^3 заполнен водородом при давлении 110 кПа. Он движется на постоянной высоте над землей в воздухе с температурой 43°С и относительной влажностью 10%. Атмосферное давление 100 кПа, температура водорода равна температуре окружающего воздуха. В какой-то момент шар попадает в область с повышенной влажностью и начинает снижаться. Чтобы прекратить снижение, с шара сбросили балласт массы 100 кг. Чему равна относительная влажность воздуха в области с повышенной влажностью? Давление насыщенного пара воды при 43°С равно 9000 Па.

Решение:

Масса, которую может поднять воздушный шар, определяют по формуле

$$m_0 = V \cdot \left(\rho_0 - \rho_{водор} \right)$$ **(2 балла)**

где ρ_0 – плотность среды, в которой находится воздушный шар, $\rho_{водор}$ – плотность водорода внутри воздушного шара, V – объем воздушного шара.

Согласно уравнению состояния, плотность газа можно подсчитать по формуле

$$P \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow P = \frac{\rho}{M} \cdot R \cdot T \Rightarrow \rho = \frac{P \cdot M}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

где P – давление газа, M – его молярная масса, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура газа: T = t + 273, где t – температура по шкале Цельсия.

Плотность водорода

$$\rho_{водор} = \frac{P_{водор} \cdot M_{водор}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Согласно условию задачи, воздушный шар летает в смеси воздуха с давлением $P_{возд}$ и водяного пара с давлением $P_{воды}$. Сумма этих давлений равна атмосферному давлению P_a, которое указано в условии задачи.

Давление водяного пара согласно определению $P_{воды} = P_0 \cdot \varphi$, где P_0 – давление насыщенного водяного пара при температуре задачи, φ - относительная влажность воздуха (в долях единицы). Тогда плотность водяного пара будет

$$\rho_{воды} = \frac{\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Плотность воздуха

$$\rho_{возд} = \frac{P_{возд} \cdot M_{возд}}{R \cdot T} = \frac{\left(P_a - \varphi \cdot P_0 \right) \cdot M_{возд}}{R \cdot T}$$ **(2 балла)**

Общая плотность паро-воздушной смеси

$$\rho_0 = \rho_{воды} + \rho_{возд} = \frac{1}{R \cdot T} \left(\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды} + \left(P_a - \varphi \cdot P_0 \right) \cdot M_{возд} \right)$$ **(2 балла)**

После подстановки всех выведенных формул выражение для поднимаемой массы становится таким:

$$m_0 = \frac{V}{R \cdot T} \left(\varphi \cdot P_0 \cdot M_{воды} + \left(P_a - \varphi \cdot P_0 \right) \cdot M_{возд} - P_{водор} \cdot M_{водор} \right)$$ **(2 балла)**

Подстановка исходных данных (из условия и справочных) позволяет рассчитать начальную и конечную массы шара:

V = 5000 м^3, T = 43+273 = 316 К, P_0 = 9000 Па, $P_а$ = 100000 Па, $P_{водор}$ = 110000 Па, $M_{водор}$ = 0,002 кг/моль, $M_{воды}$ = 0,018 кг/моль, $M_{возд}$ = 0,029 кг/моль, $m_1 - m_2$ = 100 кг.

А) Начальная влажность φ_1 = 10% = 0,1

$$m_1 = \frac{5000}{8,31 \cdot 316}\left(0,1 \cdot 9000 \cdot 0,018 + \left(100000 - 0,1 \cdot 9000\right) \cdot 0,029 - 110000 \cdot 0,002\right) = 5084 \text{ кг}$$

Б) Конечная влажность φ_2

$$m_2 = \frac{5000}{8,31 \cdot 316}\left(\varphi_2 \cdot 9000 \cdot 0,018 + \left(100000 - \varphi_2 \cdot 9000\right) \cdot 0,029 - 110000 \cdot 0,002\right) = 5084 - 100 = 4984 \text{ кг}$$

Для определения искомой влажности нужно решить последнее уравнение

$$5000 \cdot \left(\varphi_2 \cdot 9000 \cdot 0,018 + \left(100000 - \varphi_2 \cdot 9000\right) \cdot 0,029 - 110000 \cdot 0,002\right) = 4984 \cdot 8,31 \cdot 316$$

$$\varphi_2 \cdot 162 + 2900 - \varphi_2 \cdot 261 - 220 = 2617,557$$

$$62,443 = \varphi_2 \cdot 99$$

$$\varphi_2 = \frac{62,443}{99} = 0,63 = 63\%$$

(6 баллов)

Ответ: 63%.