БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

10–11 классы

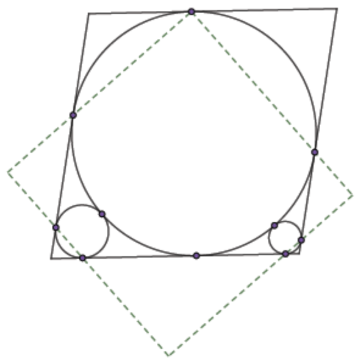
1. [3] При каком наибольшем натуральном m число $m!\cdot 2022!$ будет факториалом натурального числа?

(*Б. Френкин*)

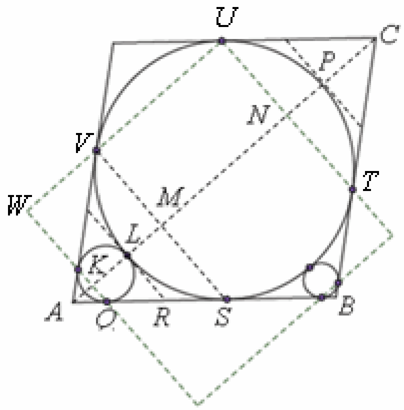
Ответ: при $m = 2022! - 1$.
Решение. $(2022! - 1)!\cdot 2022! = (2022!)!$. Если $m \geq 2022!$, то $m! < m!\cdot 2022! < (m + 1)!$.

2. [5] Большая окружность вписана в ромб, каждая из двух меньших окружностей касается двух сторон ромба и большой окружности, как на рисунке справа. Через точки касания окружностей со сторонами ромба провели четыре штриховые прямые, как на рисунке. Докажите, что они образуют квадрат.

(*Е. Бакаев*)



Решение. Полученная фигура – прямоугольник, поскольку её стороны из симметрии перпендикулярны диагоналям ромба. Осталось проверить равенство его сторон. Для этого проведём несколько дополнительных прямых, перпендикулярных диагонали AC, и обозначим некоторые точки (см. рисунок).



Решение 1. Докажем, что $KL = LM$.

Способ 1. $RQ = RL = RS$ как касательные, проведённые из одной точки. Из равенства $RQ = RS$ по теореме Фалеса получаем $KL = LM$. □

Способ 2. $\angle KQL = \angle RQL$ (они измеряются половинами равных дуг), то есть QL – биссектриса угла KQR. Аналогично SL – биссектриса угла ASM. Следовательно. точка L равноудалена от прямых KQ, AB и SM, т.е. $KL = LM$. □

Далее, одна из сторон полученного в условии прямоугольника равна KN. Из симметрии $LM = NP$. Тогда $KN = LP$, то есть диаметру вписанной в ромб окружности.

Аналогично и другая сторона прямоугольника равна этому диаметру.

Решение 2. Рассмотрим гомотетию с центром L, переводящую маленькую окружность, вписанную в угол A, в большую окружность. Она переводит AQ в параллельную ей касательную к большой окружности, то есть в CU. При этом точка Q переходит в точку U, то есть точки Q, L, U лежат на одной прямой. Далее, $\angle VUL = \angle LUS$ как вписанные опирающиеся на симметричные дуги, поэтому прямоугольные треугольники QUW и QUS равны по гипотенузе и острому углу. Следовательно, $UW = US$. Аналогично и смежная с UW сторона полученного прямоугольника равна US.

3. [5] На прямой отмечено 2022 точки так, что каждые две соседние точки расположены на одинаковом расстоянии. Половина точек покрашена в красный цвет, а другая половина – в синий. Может ли сумма длин всевозможных отрезков, у которых левый конец красный, а правый – синий, равняться сумме длин всех отрезков, у которых левый конец синий, а правый – красный? (Концы рассматриваемых отрезков – не обязательно соседние отмеченные точки.)

(*А. Грибалко*)

Ответ: не может. **Решение**. Можно считать, что отмеченные точки – целые числа от 1 до 2022. Достаточно показать, что сумма S длин всех отрезков с разноцветными концами нечётна.

Способ 1. Пусть красно-чётных точек x, тогда красно-нечётных и сине-чётных – по $y = 1011 - x$, значит, сине-нечётных – x. «Разноцветные» отрезки чётной длины не влияют на чётность S, а количество таких отрезков нечётной длины равно $x^2 + y^2$. Осталось заметить, что числа x и y разной чётности.

Способ 2. Пусть k – координата красного конца отрезка, а c – синего. Заменим длину $|k - c|$ этого отрезка на $k + c$ – чётность S не изменится. Но теперь в сумме по всем «разноцветным» отрезкам каждое число встретится ровно 1011 раз, то есть сумма равна $1011(1 + 2 + ... + 2022)$. Она нечётна, так как в скобках 1011 нечётных слагаемых.

Способ 3. Приведём только идею. Можно проверить, что S чётна, для какой-то конкретной раскраски (например, когда слева направо идут сначала все синие точки, а потом все красные), после чего проверить, что чётность у S сохраняется, если менять местами цвета соседних точек.

4. [5] Дан остроугольный неравнобедренный треугольник. Одним действием разрешено разрезать один из имеющихся треугольников по медиане на два треугольника. Могут ли через несколько действий все треугольники оказаться равнобедренными?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: не могут. **Решение**. Докажем, что всегда среди имеющихся треугольников найдется неравнобедренный непрямоугольный треугольник. В начальный момент это так.

Пусть на очередном ходе имеющийся неравнобедренный непрямоугольный треугольник ABC был разрезан по медиане BM. Так как он неравнобедренный, медиана BM не совпадает с высотой, то есть один из углов AMB, CMB – тупой. Пусть это угол AMB. Покажем, что AMB – нужный нам треугольник. Он тупоугольный (и значит, непрямоугольный). Так как $\angle ABC \neq 90°$, медиана BM не равна половине стороны AC, следовательно, $AM \neq BM$. Кроме того, $AB > AM$ и $AB > BM$ (AB – сторона напротив наибольшего угла в треугольнике AMB). Значит, треугольник AMB – неравнобедренный.

5. Доска $2N \times 2N$ покрыта неперекрывающимися доминошками 1×2. По доске прошла *хромая* ладья, побывав на каждой клетке по одному разу (каждый ход хромой ладьи – на клетку, соседнюю по стороне). Назовём ход *продольным*, если это переход из одной клетки доминошки на другую клетку той же доминошки. Каково

а) [1] наибольшее;

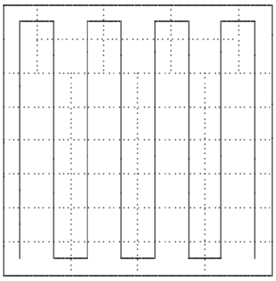
б) [4] наименьшее возможное число продольных ходов?

(*Б. Френкин*)

а) **Ответ:** $2N^2$ ходов. **Решение**. *Оценка*. Количество продольных ходов не превосходит количества $2N^2$ доминошек (так как в каждой доминошке не более одного продольного хода).

Пример. Возьмём любой обход ладьей и занумеруем клетки в порядке обхода. Пусть клетки $2k - 1$ и $2k$ образуют доминошку для всех k от 1 до $2N^2$. Тогда число продольных ходов равно числу доминошек.

б) **Ответ:** 1 ход при $N = 1$; 2 хода при $N \geq 2$. **Решение**. Случай $N = 1$ очевиден.



Пусть $N \geq 2$. *Оценка*. При проходе угла один из двух ходов будет продольным. Один угол может быть началом пути ладьи, другой – концом, а оставшиеся углы придётся проходить. Поэтому будет хотя бы два продольных хода.

Пример. Положим в верхние углы доски по вертикальной доминошке, а все остальные положим горизонтально. Пусть ладья идёт змейкой из левого нижнего угла (см. рисунок). Продольными будут лишь два хода – в вертикальных доминошках.