СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

10–11 классы

1. [5] Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c – натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

Ответ: $-\frac{1}{99}$. **Решение**. Заметим, что $-\frac{1}{99}$ – корень уравнения $99x^2 + 100x + 1 = 0$.

Докажем максимальность. Ясно, что корень x такого уравнения, как в условии, отрицателен. Пусть $|x| < \frac{1}{99}$. Тогда знаменатель q несократимой дроби $|x|$ больше 99. Но, как известно, q – делитель старшего коэффициента a, то есть он не больше 100. Значит, $q = 100$, а $|x| = 0{,}01$. Следовательно, $ax^2 + bx + c > 0 - 100\cdot 0{,}01 + 1 = 0$. Противоречие.

2. [5] Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдётся натуральное n, для которого НОК$(p + n, q + n) <$ НОК(p, q).

Михаил Малкин

Решение. Можно считать, что число $m = q - p$ не меньше 2. При этом НОД(p, m) = =НОД$(p, q) = 1$. Числа p и q сравнимы по модулю m, но не кратны m, значит, после увеличения их на некоторое натуральное число $n < m$, станут кратными m.

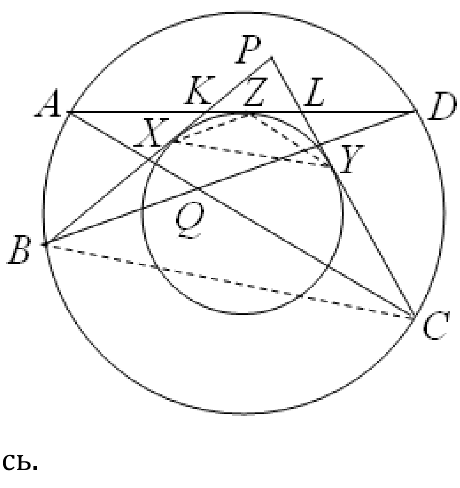
Докажем, что такое n будет искомым. Заметим, что $(p - 1)(q - 1) > 1\cdot m \geq n + 1$, то есть $pq > p + q + n$. Поэтому $pqm \geq pq(1 + n) > pq + n(p + q + n) = (p + n)(q + n)$.

Поделив на m = НОД$(p + n, m)$ = НОД$(p + n, q + n)$, получим $pq >$ НОК$(p + n, q + n)$.

3. [6] Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук

Решение. Пусть O – центр окружностей, AD касается ω в точке Z, а PB и PC касаются ω в точках X и Y и пересекают AD в точках K и L соответственно. Точки A и D симметричны относительно OZ, поэтому Z – середина AD.



Касательные PX и PY симметричны относительно PO, значит, $XY \parallel BC$. Аналогично $XZ \parallel BD$, $ZY \parallel AC$. Рассмотрим гомотетию с центром P, переводящую отрезок BC в XY. Она переводит точку пересечения Q прямых BD и AC в точку пересечения параллельных им прямых XZ и YZ, то есть в точку Z. Следовательно, точки P, Z и Q лежат на одной прямой, что и требовалось.

4. [7] В клетчатом квадрате между каждыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

Решение. Если до какой-то закрытой двери можно добраться, направим жука к ней и откроем. Продолжим этот процесс. Общее количество закрытых дверей уменьшается, значит, в некоторый *прекрасный* момент не останется закрытых дверей, до которых можно дойти.

Предположим, что в этот момент осталось непустое множество N недостижимых клеток. Оставшиеся клетки образуют множество D достижимых клеток. Заметим, что все двери между N и D открыты в сторону D. Ясно, что таких дверей хотя бы две. Это значит, что жук когда-то открыл одну из них, попал в D, а потом смог вернуться в N, чтобы открыть вторую дверь. Но нет двери, через которую он мог попасть в N. Противоречие.

Следовательно, в прекрасный момент все клетки достижимы и жук может вернуться в исходную клетку.

Замечание. Аналогично решается задача, где жук гуляет по произвольному графу *без мостов*, рисуя стрелки на рёбрах в направлении их прохода, с запретом ходить против стрелок.

5. [8] В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

Ответ. Не обязательно. **Решение**. См. задачу 6 для 8–9 классов.

6. [2 + 7] См. задачу 7 для 8–9 классов.

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

а) [5] $N = 201$; **б**) [5] $N = 400$?

Андрей Аржанцев

Ответ: найдутся. **Решение**. **а**) Пусть площадь пиццы равна 201. Тогда площадь вписанного в неё квадрата равна $\frac{402}{\pi} > 121$. Нарисуем внутри пиццы квадрат со стороной 11 так, чтобы центры квадрата и пиццы совпали. Проведя по 12 разрезов, параллельных сторонам квадрата, получим 121 кусок 1×1. Мысленно склеим куски пиццы вне квадрата и разобьём эту фигуру 40 разрезами через центр на 80 равновеликих кусков (в силу непрерывности это можно сделать, вращая диаметр). Всего хватило 64 разреза.

б) Пусть площадь пиццы равна 400. Тогда площадь вписанного правильного шестиугольника равна $\frac{600\sqrt{3}}{\pi} > 294$. Нарисуем внутри пиццы правильный шестиугольник площади 294 так, чтобы его центр и центр пиццы совпали. Отметим вершины и точки на сторонах шестиугольника так, чтобы каждая сторона разбилась на

7 равных частей. Если провести разрезы, параллельные сторонам шестиугольника через все отмеченные точки (всего таких разрезов $3 \cdot 15 = 45$), разобьём шестиугольник на $6 \cdot 7^2 = 294$ равных правильных треугольника площади 1. Мысленно склеим куски пиццы вне шестиугольника и разобьём эту фигуру 53 разрезами через центр на 106 равновеликих кусков. Всего хватило 98 разрезов.

Замечание. Количество разрезов можно сильно уменьшить, если воспользоваться следующей общей идеей. Положим пиццу нужной площади на единичную сетку, совместив центр пиццы с центром одной из клеток. Проведём все разрезы по линиям сетки, пересекающим пиццу. В результате она разрежется на единичные порции и кусочки по краям, составляющие каёмку. С каемкой поступим, как в вышеизложенном решении. Но по сравнению с ним площадь каемки сильно уменьшится и разрезов потребуется меньше. Например, в пункте а), положив пиццу на квадрат 15×15 и проведя 32 разреза по линиям сетки, мы обнаружим, что кроме квадрата 11×11, она содержит ещё 56 клеток. Площадь каёмки будет равна 24, поэтому всего потребуется $32 + 12 = 44$ разреза.