СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 26 марта 2023 года

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. *Дана треугольная пирамида $SABC$, основание которой — равносторонний треугольник ABC, а все плоские углы при вершине S равны α. При каком наименьшем α можно утверждать, что эта пирамида правильная?*

М. Малкин

Ответ: 60°.

Докажем, что при $\alpha = 60^\circ$ пирамида правильная. Пусть стороны треугольника ABC равны 1. Заметим, что в любом треугольнике с углом 60° против этого угла лежит средняя по длине сторона (причём если она строго меньше одной из сторон, то строго больше другой). Пусть одно из боковых рёбер пирамиды не равно 1: например, $SA > 1$. Тогда в гранях SAB и SAC рёбра SB и SC будут меньше 1, и значит, в грани SBC ребро BC — не средняя сторона, противоречие.

Покажем теперь, как построить неправильную пирамиду с плоскими углами $\alpha < 60^\circ$ при вершине S.

Первый способ. Сначала боковое ребро SA удаляем, а неудалённую боковую грань SBC вращаем вокруг её ребра основания BC, пока эта грань не окажется в плоскости основания так, что будет содержать треугольник основания. В процессе движения будут «текущие» пирамиды, у которых два равных плоских угла сначала равны α, потом больше α (в момент, когда вершина проектируется в вершину основания — поскольку в этот момент синус угла при вершине S в боковых гранях SAC и SAB равен $1 : SB$, а в грани SBC равен отношению боковой высоты этого треугольника к SB, которая меньше 1), а в конце у «вырожденной» пирамиды они равны $\alpha/2$. Значит, в силу непрерывности, будет ещё раз α.

Второй способ. Рассмотрим треугольник SAB с $SA = SB$ и $\angle S = \alpha$. Так как $AB < SB$, на стороне SA существует такая точка C, что $BC = AB$. Теперь возьмем трёхгранный угол, у которого все плоские углы равны α, и отложим на его ребрах отрезки SA, SB, SC. Пирамида $SABC$ — искомая.

Третий способ. (*Сергей Комаров, 11 класс, СУНЦ МГУ)* Пусть $S'ABC$ — правильная пирамида с плоским углом α при вершине S'. Пусть X, Y — точки, такие, что $XY = AB$, построим на XY треугольники XYZ и XYT так, что $\angle ZXY = \angle ZYX = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle TXY = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, $\angle TYX = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2}$, тогда понятно что $\angle XTY = \angle XZY = \alpha$. В силу теоремы синусов для этих треугольников имеем

$$\frac{TY}{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{XY}{\sin\alpha} = \frac{ZX}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{ZY}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

что влечёт $TY = ZX = ZY$, поскольку синусы смежных углов равны.

Пусть теперь S — такая точка на продолжении отрезка $S'B$ за точку B, что $SB = TX$. Тогда $\angle SBC = \angle SBA = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \angle TXY$, $BC = BA = XY$, и $SB = SB = TX$, тогда $\Delta SBC = \Delta SBA = \Delta TXY$, откуда $SC = SA = TY = ZX = ZY$, и значит $\Delta SCA = \Delta ZXY$ (по трём сторонам). Из всех указанных равенств треугольников следует, что у пирамиды $SABC$ все плоские углы при вершине S равны α, значит она удовлетворяет условиям задачи. Но она не правильная, поскольку прямая $S'B$ не перпенидикулярна ABC, и на ней только одна точка проецируется в центр треугольника ABC, это точка S', а значит не точка S.

2. *Существует ли целое $n > 1$, удовлетворяющее неравенству*

$$[\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2}] < [\sqrt{9n+6}]?$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

М. Малкин

Ответ: нет.

Предположим целое $n > 1$ удовлетворяет этому неравенству. Имеем $[\sqrt{9n+6}]^2 \leqslant 9n+6$, но квадрат целого числа не может давать ни остаток 6, ни остаток 5 от деления на 9, откуда $[\sqrt{9n+6}]^2 \leqslant 9n+4$, значит $[\sqrt{9n+6}] \leqslant [\sqrt{9n+4}]$. Тогда исходное неравенство влечёт неравенство $\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2} < \sqrt{9n+4}$. Возводя в квадрат и приводя подобные слагаемые, получаем, что $4\sqrt{n^2-4} < 4n-2$, откуда $n^2 - 4 < n^2 - n + \frac{1}{4}$, а тогда $n < 4{,}25$. Однако, прямая проверка показывает, что при $n \in \{2, 3, 4\}$ исходное неравенство не выполняется — противоречие.

3. *В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.*

Б. Френкин

Положим $N = 44$, и пусть b и r — количества синих и красных клеток. Оценим сверху количество M общих сторон красных клеток с синими.

Всего у красных клеток $4r$ сторон, откуда $M \leqslant 4r$. Вдоль краёв таблицы стоит не меньше $2N$ сторон красных клеток, поэтому $M \leqslant 4r - 2N$. Теперь рассмотрим граф, вершины которого — красные клетки, а рёбра соединяют клетки, имеющие общую сторону. По условию граф связен, поэтому количество его рёбер не меньше $r - 1$. Каждому из них отвечает общая сторона двух красных клеток, засчитанная в величине $4r$ два раза, поэтому из M можно вычесть $2(r-1)$. Получаем

$$M \leqslant 4r - 2N - 2(r-1) = 2r - 2N + 2. \tag{1}$$

Оценим теперь M снизу. Сложив количества сторон всех синих клеток, получим $4b$. Ясно, что на одной стороне таблицы не больше $N/2$ сторон синих клеток. Поэтому

$$M \geqslant 4b - 2N. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $4b - 2N \leqslant M \leqslant 2r - 2N + 2$. Поскольку $b + r = N^2$, получаем отсюда $6b \leqslant 2N^2 + 2$, или

$$b \leqslant N^2/3 + 1/3.$$

Поскольку $N^2 = 44^2 \equiv 1 \pmod 3$, а b целое, получаем нужный результат.

4. *Дан треугольник ABC. Пусть I — центр его вписанной окружности, P — такая точка на стороне AB, что угол PIB прямой, Q — точка, симметричная точке I относительно вершины A. Докажите, что точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.*

И. Кухарчук, А. Юран

Пусть CI пересекает AB в точке N. Угол AIB тупой, а угол NIB острый, значит P лежит между A и N. Далее $\angle AIP = \angle AIB - 90^\circ = \angle ACB/2 = \angle ACI$, $\angle CAI = \angle IAP$, значит треугольники CAI и IAP подобны. Учитывая это и равенство $QA = AI$, имеем $\frac{IC}{AC} = \frac{PI}{AI} = \frac{PI}{QA}$.

Кроме того,

$$\angle AIP + \angle AIC = \angle ACB/2 + (90^\circ + \angle ABC/2) = 180^\circ - \angle CAB/2,$$

тогда $\angle PIC = 180^\circ - \angle CAB/2 = 180^\circ - \angle CAI = \angle QAC$. Тогда треугольники QAC и PIC подобны по углу и отношению прилежащих сторон, значит $\angle IPC = \angle AQC = \angle IQC$, и точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.

Замечание. После доказательства подобия треугольников CAI и IAP можно действовать по-другому. Выберем точку R на продолжении отрезка CA за точку A так, что $AP = AR$; тогда треугольники IAP и QAR равны ($IA = QA$, $AP = AR$, $\angle QAR = \angle CAI = \angle IAP$). Значит, $QRPI$ — равнобокая трапеция, и она вписана. С другой стороны, поскольку $\angle CIQ = \angle CIA = \angle CRQ$, точки C, I, R, Q лежат на одной окружности. Значит, все пять точек C, I, P, Q, R лежат на окружности (QRI).

5. *Назовём рассадку N кузнечиков на прямой в различные её точки k-*удачной*, если кузнечики, сделав необходимое число ходов по правилам чехарды, могут добиться того, что сумма попарных расстояний между ними уменьшится хотя бы в k раз. При каких $N \geqslant 2$ существует рассадка, являющаяся k-удачной сразу для всех натуральных k? (В чехарде за ход один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.)*

М. Святловский

Ответ: при $N \geqslant 3$.

Первое решение. При $N = 2$ как бы кузнечики ни прыгали, расстояние между ними не меняется.

Пусть $N \geqslant 3$. Рассадим 1-го, 2-го и 3-го кузнечиков на прямой в точках с координатами 0, 1, $\sqrt{2}$, назовём этих кузнечиков V, Q, R. Остальные произвольно рассаживаются в другие попарно различные точки. Покажем, что для всякого k кузнечики далее смогут прыгать так, чтобы сумма попарных расстояний уменьшилась хотя бы в k раз (исходную сумму обозначим через P).

Лемма. Пусть три кузнечика сидят на прямой в попарно различных точках и отношение расстояний от одного из них до двух других иррационально. Тогда сколько бы они ни сделали прыжков друг через друга, они всё равно будут в попарно различных точках, и отношение расстояний от одного из них до двух других будет иррационально.

Доказательство леммы. Покажем, что эти условия сохраняются при прыжке. Предположим, для некоторого кузнечика отношение расстояний до двух других рационально, тогда эти расстояния имеют вид a и aq, где q рационально. Тогда расстояние между другими двумя кузнечиками ненулевое и имеет вид $|a \pm aq|$, тогда отношение любых двух расстояний между кузнечиками рационально, противоречие. Пусть какой-то кузнечик перепрыгнул через кузнечика A, тогда расстояния от A до обоих кузнечиков не изменились, а значит отношение этих расстояний осталось иррациональным, в частности расстояния различны, и потому кузнечики по-прежнему находятся в попарно-различных точках.

Перейдём к задаче. Пусть первые несколько ходов будут прыгать только кузнечики V, Q, R и только через друг друга, согласно лемме при таких прыжках они всегда будут оставаться в попарно различных точках. Покажем, что спустя любое количество таких ходов они смогут далее прыгать так, чтобы текущее минимальное из попарных расстояний между ними уменьшилось не менее чем в два раза.

Пусть, не умаляя общности, в текущий момент минимально расстояние между кузнечиками V, Q с координатами a и b, а R имеет координату c. Отметим на прямой все точки с координатами, отличающимися от a на число, кратное $(a - b)$. Понятно, что прыгая друг через друга кузнечики V, Q смогут занять любые две соседние отмеченные точки, тогда R не находится в отмеченной точке (по лемме прыгая только через друг друга V, Q, R остаются в попарно различных точках), тогда V, Q могут занять две соседние отмеченные точки между которыми лежит c, и расстояние от R до одного из кузнечиков будет не более $|a-b|/2$, то есть наименьшее расстояние уменьшилось хотя бы в 2 раза.

Тогда за несколько ходов кузнечики V, Q, R могут уменьшить наименьшее расстояние между ними хотя бы в 2 раза, потом за несколько ходов ещё хотя бы в 2 раза, потом ещё, и т.д, могут за несколько ходов добиться того, чтобы расстояние между какими-то двумя из них было равно некоторому числу t, меньшему $P/(2N(N-1)\cdot k)$ — пусть они так и сделают. Назовём каких-нибудь двух кузнечиков, между которыми расстояние t, хорошими, и одного из них назовём D, далее эти кузнечики уже не прыгают.

Далее, любой кузнечик не из пары хороших может прыгая через пару хороших (в подходящем порядке) смещаться на $2t$ в любую сторону на прямой, и тогда может за несколько прыжков через них оказаться на расстоянии меньшем $2t$ от D, пусть все кузнечики кроме хороших сделают прыжки таким образом. Тогда расстояние от любого кузнечика до D будет меньше $2t$, а значит, все попарные расстояния меньше $4t$, а значит, их сумма меньше $4t\cdot N(N-1)/2 < P/k$.

Второе решение. *(Евгений Эндека, 11 класс, Барнаул)* Для любого $N > 2$ предъявим явно начальную рассадку, которая является k-удачной для любого натурального числа k.

Сначала для данного $N > 2$ построим конечную геометрическую прогрессию $1, q, \ldots, q^{N-1}$, со знаменателем $q \in (0,1)$, для которой выполнено условие

$$1 = q + q^2 + \ldots + q^{N-1}.$$

Требуемый набор существует при любом целом $N > 2$, поскольку уравнение

$$q + q^2 + \ldots + q^{N-1} - 1 = 0$$

имеет решение на интервале $(0,1)$, так как левая часть меняет знак на его концах.

Расположим теперь N кузнечиков в следующих начальных точках:

$$0,\ 1,\ (1+q),\ (1+q+q^2),\ \ldots,\ (1+q+\ldots+q^{N-3}),\ (1+q+\ldots+q^{N-2}).$$

Рассмотрим прыжок первого кузнечика через второго; тогда его новая координата будет равна $2 = 1+1 = 1+q+q^2+\ldots+q^{N-1}$. Получилось, что прыгнувший кузнечик стал самым правым, а все кузнечики теперь расположены в точках

$$1,\ (1+q),\ \ (1+q+q^2),\ \ldots,\ (1+q+\ldots+q^{N-2}),\ (1+q+\ldots+q^{N-1}).$$

Сдвинув начало координат на 1 вправо, получим координаты кузнечиков

$$0,\ q,\ (q+q^2),\ \ldots,\ (q+\ldots+q^{N-2}),\ (q+\ldots+q^{N-1}).$$

Таким образом, кузнечики уменьшили свои координаты ровно в q раз. Если указанный шаг (прыжок самого левого кузнечика через ближайшего соседа) повторять r раз, то попарные расстояния изменятся в q^r раз, что позволит достичь любого нужного уменьшения $1/K$.

6. *В ряд слева направо стоят N коробок, занумерованных подряд числами 1, 2, …, N. В некоторые коробки, стоящие подряд, положат по шарику, оставив остальные пустыми.*

Инструкция состоит из последовательно выполняемых команд вида «поменять местами содержимое коробок № i и № j», где i и j — числа. Для каждого ли N существует инструкция, в которой не больше $100N$ команд, со свойством: для любой начальной раскладки указанного вида можно будет, вычеркнув из инструкции некоторые команды, получить инструкцию, после выполнения которой все коробки с шариками будут левее коробок без шариков?

И. Митрофанов

Ответ: да.

Давайте считать, что все шарики синие. В пустые коробки положим по красному шарику. Теперь пустых коробок нет. Покажем даже более сильное утверждение: что для любого N есть инструкция не длиннее чем $3N$ со следующим свойством.

Пусть в N коробочках, стоящих в ряд, лежат красные и синие шарики, причём для хотя бы одного из цветов шарики этого цвета лежат подряд (такие конфигурации назовём непрерывными). Тогда можно вычеркнуть часть строк и получить инструкцию, после выполнения которой все синие шарики будут левее всех красных шариков, а также можно получить инструкцию, после которой все красные шарики левее всех синих (нумерация коробок слева направо).

Понятно, что для $N = 1$ такая инструкция есть. Покажем, как из инструкции для $k \geqslant 1$ сделать инструкцию для $2k$ и для $2k-1$, этого будет достаточно. Обозначим $N = 2k$ или $2k-1$.

Инструкция для N будет выглядеть так:

I группа: сначала все пары вида $(i, k+i)$ в любом порядке

Если N нечетно, сюда приходится добавить все пары вида $(i+1, i+k)$ при $i \geqslant 1$ (назовём эти команды дополнительными).

II группа: инструкция для k первых коробочек из индукционного предположения

III группа: все пары различных чисел вида $(i, N+1-i)$ в любом порядке

При $N = 2k$ длина этой инструкции не превышает $k + 3k + k = 5k \leqslant 3N$.

При $N = 2k-1$ длина этой инструкции не превышает $2(k-1)+3k+(k-1) = 6k-3 = 3N$. Теперь почему она работает. Есть тот цвет, которого не больше k, назовём его основным. Покажем, что можно выполнить часть инструкций I группы так, чтобы все камни основного цвета лежали среди первых k коробочек, и при этом конфигурация среди первых k коробочек будет тоже непрерывной.

Есть четыре варианта того, как могут располагаться камни основного цвета.

1) они идут подряд, и все они среди левых k коробок — ничего делать не надо;

2) они идут подряд, и все они среди правых коробок — используем все пары вида $(i, k+i)$;

3) они есть и среди левых k коробок, и среди остальных правых, при этом они идут подряд. Заметим, что ни в какой паре вида $(i, i+k)$ нет двух камней основного цвета. Все основные камни тогда перенесем справа налево (тогда камни не основного цвета будут среди первых k камней лежать подряд.

4) Камни основного цвета — самые первые и самые последние. Перенеся последние влево (при нечётном N используя дополнительные операции), получаем требуемое.

(Про это всё проще думать, если мыслить расположение коробочек не в ряд, а по окружности.)

После этого применим часть инструкций II группы, чтобы среди первых k коробочек слева оказались все камни основного цвета.

После этого окажется, что среди N коробочек сначала идут подряд камни одного цвета, а потом камни другого. То есть мы пришли либо к искомой ситуации, либо к зеркальной. Перестановками третьей группы, если надо, отразим конфигурацию, и получим что хотели получить.