БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. [3] Можно ли расставить в клетках таблицы 6×6 числа, среди которых нет одинаковых, так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×5 (как вертикальном, так и горизонтальном) сумма чисел была равна 2022 или 2023?

(*Е. Бакаев*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть это удалось. Числа в соседних углах различаются на 1, так как каждое из них дополняет четыре клетки между ними до прямоугольника 1 × 5. Пусть a – наименьшее число из угловых. Тогда в соседних с ним углах стоят числа $a + 1$. Противоречие.

2. [4] Существует ли натуральное число, которое можно представить в виде произведения двух палиндромов более чем 100 способами? (Палиндромом называется натуральное число, которое одинаково читается как слева направо, так и справа налево.)

(*Е. Бакаев*)

Ответ: существует. Рассмотрим палиндром $1_n = \underbrace{1\ldots1}_{n}$.

Способ 1. Если n кратно k, то 1_n делится на палиндром 1_k, причём частное – тоже палиндром, состоящий из единиц, разделённых группами из $k - 1$ нуля. Осталось выбрать число n, имеющее более 100 собственных делителей. Например, 2^{101}.

Замечание. Число 6_n делится не только на 1_k, но и на 2_k, 3_k и 6_k. Это позволяет уменьшить n до числа, имеющего более 25 собственных делителей, например, годится $n = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Идея способа 2. Заметим, что если при умножении палиндромов не происходит переносов из одного разряда в другой, то произведение – тоже палиндром. Рассмотрим произведение $11 \cdot 101 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{7}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{15}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{31}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{63}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{127}1 = 1_{256}$. Можно доказать, что при умножении любого числа этих сомножителей переносов не происходит и получается палиндром из нулей и единиц. Поскольку 8 множителей можно $2^7 = 128$ способами разбить на две группы, можно получить 128 различных (поскольку множители взаимно просты) представлений числа 1_{256} в виде произведения двух палиндромов.

Замечание 2. Соображения из замечания к способу 1 показывают, что годится число 6_{64}. Можно показать, что подходит даже число

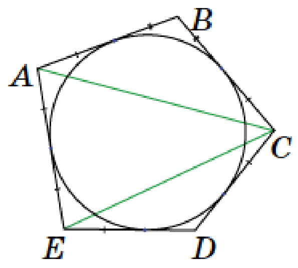
$$11 \cdot 101 \cdot 1001 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{4}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{5}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{6}1 \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{7}1.$$

3. [5] Пятиугольник $ABCDE$ описан около окружности. Углы при его вершинах A, C и E равны 100°. Найдите угол ACE.

(*М. Евдокимов*)

Ответ: 40°. Несложно понять, что такой пятиугольник существует.

Решение 1. Прямые, соединяющие вершины с центром O вписанной окружности ω, являются биссектрисами углов пятиугольника. Поэтому $\angle OAE = \angle OEA = 50°$, $\angle AOE = 80°$. Пусть ω касается сторон BC и AE в точках K и M соответственно. Тогда $\angle OCK = 50°$, и прямоугольные треугольники OMA, OKC и OME равны по катету и противолежащему углу. Значит, $OA = OC = OE$, т. е. точки A, C и E лежат на окружности с центром O. Следовательно, $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle AOE = 40°$.



Решение 2. Так как углы A, C, E равны, все касательные к окружности из этих вершин равны. Поскольку касательные из вершины B тоже равны, треугольник ABC равнобедренный, и треугольник CDE тоже (аналогично). Сумма углов B и D равна $540° - 3\cdot100° = 240°$, поэтому $\angle ACB + \angle ECD = (2\cdot180° - 240°):2 = 60°$, а $\angle ACE = 100° - 60° = 40°$.

4. [5] Можно ли раскрасить все натуральные числа, большие 1, в три цвета (каждое число – в один цвет, все три цвета должны использоваться) так, чтобы цвет произведения любых двух чисел разного цвета отличался от цвета каждого из сомножителей?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: нельзя. **Решение**. Пусть удалось раскрасить числа в синий, красный и зелёный цвета. Можно считать, что число 2 синее, а 4 не красное. Возьмём красное число k. Тогда число $2k$ зелёное, а $2\cdot(2k)$ красное. С другой стороны, $4\cdot k$ не красное. Противоречие.

5. [5] У Пети есть 8 монет, про которые он знает только, что 7 из них настоящие и весят одинаково, а одна фальшивая и отличается от настоящей по весу, неизвестно в какую сторону. У Васи есть чашечные весы – они показывают, какая чашка тяжелее, но не показывают, насколько. За каждое взвешивание Петя платит Васе (до взвешивания) одну монету из имеющихся у него. Если уплачена настоящая монета, Вася сообщит Пете верный результат взвешивания, а если фальшивая, то случайный. Петя хочет определить 5 настоящих монет и не отдать ни одну из этих монет Васе. Может ли Петя гарантированно этого добиться?

(*А. Грибалко, А. Заславский*)

Ответ: может. **Решение**. Обозначим монеты A, B, C, D, E, F, G, H. Петя отдаёт H и просит Васю сравнить $A + B$ с $C + D$.

1) Вася отвечает, что весы в равновесии. Тогда монеты A, B, C, D настоящие (независимо от того, какая монета досталась Васе). Петя отдаёт G за сравнение A с E. Если Вася ответит, что их веса не равны, то монета F настоящая. В противном случае монета E настоящая.

2) Вася отвечает, что $A + B$ тяжелее. Тогда монеты E, F, G настоящие. Петя отдаёт D за сравнение A с B. Если Вася отвечает, что их веса не равны, то более лёгкая из этих двух и монета C настоящие. В противном случае монеты A и B настоящие.

Случай, когда $C + D$ тяжелее рассматривается аналогично.