СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] Сто друзей, среди которых есть Петя и Вася, живут в нескольких городах. Петя узнал расстояние от своего города до города каждого из оставшихся 99 друзей и сложил эти 99 чисел. Аналогично поступил Вася. Петя получил 1000 км. Какое наибольшее число мог получить Вася? (Города считайте точками плоскости; если двое живут в одном и том же городе, расстояние между их городами считается равным нулю.)

Борис Френкин

Ответ. 99000 км.

Решение. *Оценка*. Пусть Вася живёт в городе V, а Петя – в городе P. Рассмотрим произвольного Васиного друга (это может быть и Петя), пусть он живёт в городе X. По неравенству треугольника $VX \le PV + PX$, а эта сумма не больше суммы Пети, т. е. 1000 км. Значит, сумма расстояний от V до городов всех 99 друзей Васи не более $99 \cdot 1000$ км.

Пример. Все, кроме Васи, живут в одном городе, а Вася – в 1000 км от них.

2. Для каждого из чисел 1, 19, 199, 1999 и т. д. изготовили одну отдельную карточку и записали на ней это число.

а) [2] Можно ли выбрать не менее трёх карточек так, чтобы сумма чисел на них равнялась числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки?

б) [3] Пусть выбрали несколько карточек так, что сумма чисел на них равна числу, все цифры которого, кроме одной, – двойки. Какой может быть его цифра, отличная от двойки?

Сергей Маркелов

а) **Ответ**. Можно. **Решение**. Например, 19 + 199 + 1999 + ... + 199999999 = 222222212.

б) **Ответ**. 0 или 1. **Решение**. *Пример* с нулём: 1 + 19 = 20; *пример* с 1 дан в пункте **а**).

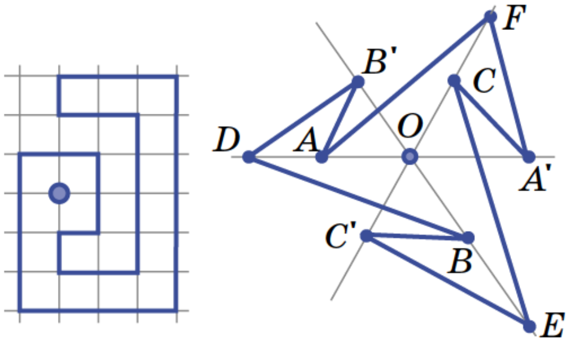
Оценка. Заметим, что $10^n \le \underbrace{19\ldots9}_{n} < 2\cdot10^n$. Поэтому сумма S чисел на выбранных k карточках удовлетворяет неравенству $E \le S < 2E$, где число E состоит из k единиц и, возможно, нескольких нулей. Значит, в записи S и $2E$ одинаковое количество цифр, причём хотя бы одна цифра числа S меньше соответствующей цифры числа $2E$, т. е. меньше 2. Это может быть только цифра 0 или 1.

Замечание. Как видно из решения, сумма чисел, начинающихся с единицы и имеющих попарно различное количество цифр, всегда содержит в своей записи 0 или 1.

3. [6] Барон Мюнхгаузен утверждает, что нарисовал многоугольник и точку внутри него так, что любая прямая, проходящая через эту точку, делит этот многоугольник на три многоугольника. Может ли барон быть прав?

Татьяна Казицына

Ответ: может. **Решение**. См. примеры справа. На втором рисунке существенно, что на одной прямой лежит тройка точек A, O, A', тройка B, O, B' и тройка C, O, C'.



4. [7] Пусть $n > 1$ – целое число. В одной из клеток бесконечной белой клетчатой доски стоит ладья. Каждым ходом она сдвигается по доске ровно на n клеток по вертикали или по горизонтали, закрашивая пройденные n клеток в чёрный цвет. Сделав несколько таких ходов, не проходя никакую клетку дважды, ладья вернулась в исходную клетку. Чёрные клетки образуют замкнутый контур. Докажите, что число белых клеток внутри этого контура даёт при делении на n остаток 1.

Александр Грибалко

Решение 1. Пусть сторона клеток доски равна 1. Отметим центр начальной клетки и центры всех клеток, до которых ладья может добраться за один или несколько ходов. Проведём через них синие прямые параллельно линиям сетки. Образуется вспомогательная синяя сетка, разбитая на клетки со стороной n. Если ладья прыгала из клетки A в клетку B, соединим центры этих клеток отрезком. Эти отрезки образуют замкнутый многоугольник; его вершины лежат в узлах синей сетки, а стороны идут по линиям синей сетки. Поэтому площадь многоугольника кратна n^2 (пусть она равна an^2). Периметр его кратен $2n$ (ведь шаги ладьи кратны n, причём сдвиги ладьи влево компенсируются сдвигами вправо, а сдвиги вверх – сдвигами вниз). Далее можно рассуждать по-разному.

Способ 1. Площадь многоугольника состоит из белой клетчатой части и из чёрной каёмки, окружающей белую часть. Разобьём контур многоугольника на отрезки между узлами синей сетки. К каждому из них изнутри прилегает чёрная прямоугольная полоска ширины $\frac{1}{2}$. Её площадь равна $\frac{n}{2}$. Так как число таких полосок чётно, их общая площадь – целое число, кратное n (пусть bn). Но эта «общая площадь» не совпадает с чёрной площадью внутри многоугольника. Несовпадения возникают из-за чёрных клеток в углах многоугольника: если угол равен 90°, то полоски перекрываются по четверти чёрной клетки; а при угле в 270° внутри остаётся четверть клетки, не покрытая полосками. Внешние углы многоугольника равны ±90°, а поскольку сумма внешних углов (с учётом знаков) равна 360°, то внешних углов в 90° на 4 больше, чем внешних углов в –90°, то есть внутренних углов в 90° на 4 больше, чем углов в 270°. Поэтому площадь чёрной каёмки внутри контура меньше суммарной площади полосок на 1. Значит, чёрная площадь внутри многоугольника равна $bn - 1$, а белая площадь внутри равна тогда $an^2 - (bn - 1) = n \cdot (an - b) + 1$. Но эта площадь равна числу белых клеток!

Способ 2. Проведём через центры всех клеток исходной доски красные прямые параллельно линиям сетки, образуется красная сетка с единичными клетками. Многоугольник, рассмотренный выше, – клетчатый многоугольник на этой сетке, поэтому количество Г красных узлов на его границе равно его периметру, а значит, кратно $2n$. Центром всякой клетки исходной доски является красный узел, поэтому такая клетка целиком лежит внутри этого многоугольника тогда и только тогда, когда внутри этого многоугольника лежит её центр. Поэтому количество В белых клеток внутри многоугольника равно количеству красных узлов внутри него. По формуле Пика для этого многоугольника и красной сетки, $В + \frac{Г}{2} - 1 = an^2$, откуда $В \equiv 1 \pmod{n}$.

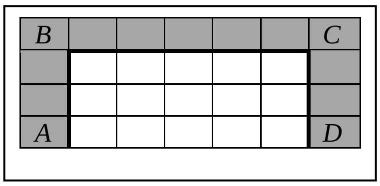
Решение 2. Назовём клетки, в которых может останавливаться ладья, *узлами*. Клетка является узлом, если до какого-то другого узла расстояние как по вертикали, так и по горизонтали кратно n. Чёрный контур вместе с белыми клетками внутри него образуют клетчатый многоугольник M.

Индукция по периметру M. *База*. Наименьший периметр равен $4(n + 1)$ у квадрата, внутри него находится $(n - 1)^2$ белых клеток.

Шаг индукции. Пусть периметр больше $4(n + 1)$.

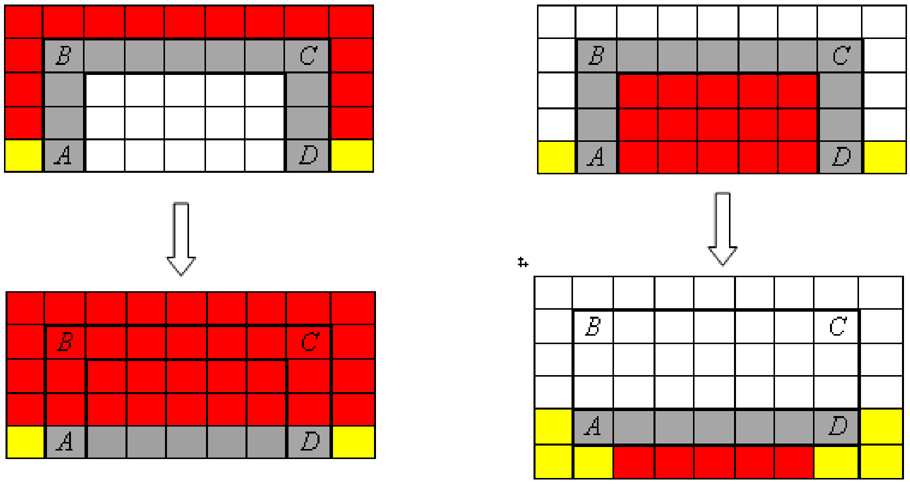
Способ 1. Тогда найдётся клетчатая вертикаль или горизонталь, содержащая узлы, по обе стороны от которой есть чёрные клетки. Она содержит несколько интервалов внутренних белых клеток с концами в чёрных узлах. Выберем любой из этих интервалов, он разбивает чёрный контур на два контура меньшей длины. По предположению индукции внутри каждого из них число белых клеток сравнимо с 1, а на «разбивающем» интервале сравнимо с –1 по модулю n. Поэтому число белых клеток внутри исходного контура сравнимо с $1 + 1 - 1 = 1 \pmod{n}$.

Способ 2. Многоугольник M имеет выпуклые (90°) и невыпуклые (270°) углы. Назовём сторону многоугольника *крайней*, если она соединяет два равных угла этого многоугольника. Крайние стороны, очевидно, есть, пусть BC – участок пути, соответствующий кратчайшей из них. Без ограничения общности можно считать, что он горизонтален, а ладья пришла в B снизу из ближайшего узла A и ушла из C вниз в ближайший узел D (см. рисунок справа, где $n = 3$).

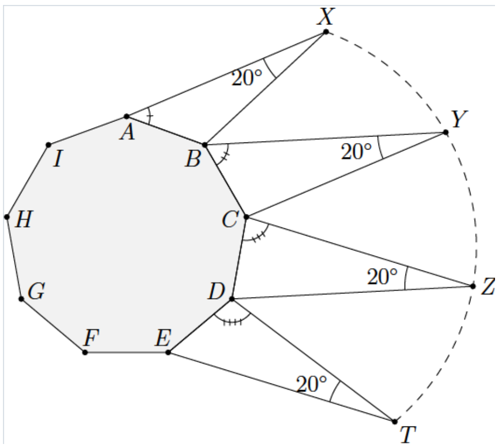


Если из D контур поворачивает в сторону A (или из A в сторону D), то CD – крайняя сторона. Значит, $BC = CD$, то есть $ABCD$ – минимальный квадрат, что противоречит рассматриваемому случаю.

В противном случае внутри «отрезка» AD нет других участков пути ладьи: такой участок обязан быть крайним (путь вверх из его концов невозможен), но это противоречит выбору BC. Таким образом, все клетки между A и D белые либо все они лежат вне многоугольника. Заменим часть пути *ABCD* «отрезком» *AB*. При этом многоугольник *M* потеряет (рис. слева) либо приобретет (рис. справа) белый прямоугольник высоты *n*, то есть, количество белых клеток по модулю *n* не изменится. (На рисунках красные клетки заведомо лежат вне многоугольника, а где лежат жёлтые клетки зависит от того, куда продолжается чёрный контур из точек *A* и *D*.)



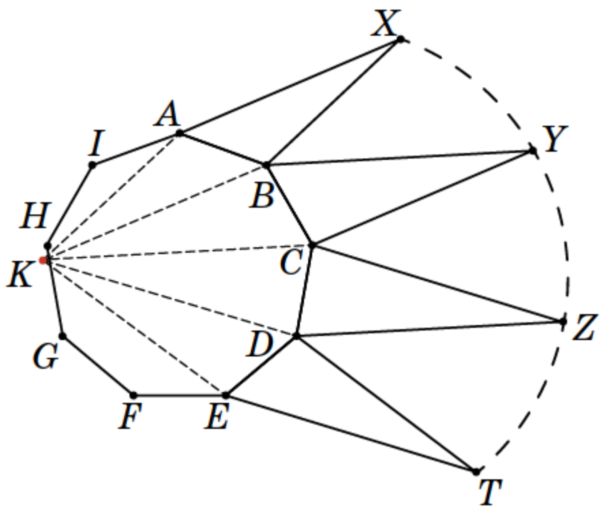
В обоих случаях периметр много-угольника уменьшится, поэтому по предположению индукции число белых клеток в нём сравнимо с 1 по модулю *n*.



5. [9] На сторонах правильного девятиугольника *ABCDEFGHI* во внешнюю сторону построили треугольники *XAB*, *YBC*, *ZCD* и *TDE*. Известно, что углы *X*, *Y*, *Z*, *T* этих треугольников равны 20° каждый, а среди углов *XAB*, *YBC*, *ZCD* и *TDE* каждый следующий на 20° больше предыдущего. Докажите, что точки *X*, *Y*, *Z*, *T* лежат на одной окружности.

Егор Бакаев

Решение 1. Отразив точку *X* относительно середины *AB*, получим точку *K*, лежащую на большей дуге *AC* описанной окружности девятиугольника (вписанный угол, опирающийся на хорду *AB*, равен 20°, а $\angle KBA = \angle XAB = \angle YBC - 20° < 160° - 20° = \angle CBA$). Далее, $\angle KCB = \angle KCA + \angle ACB = \angle KBA + 20° = \angle XAB + 20° = \angle YBC$. Значит, треугольники *KCB* и *YBC* равны по углам и стороне. Поэтому точка *Y* симметрична точке *K* относительно середины *BC*. Аналогично точки *Z* и *T* симметричны точке *K* относительно середин *CD* и *DE* соответственно. Следовательно, точки *X*, *Y*, *Z*, *T* лежат на окружности, получающейся из окружности, проходящей через середины сторон девятиугольника гомотетией с центром *K* и коэффициентом 2.



Решение 2 (конспект). Пусть O – центр девятиугольника, O_X, O_Y, O_Z, O_T – центры описанных окружностей Ω_X, Ω_Y, Ω_Z, Ω_T треугольников XAB, YBC, ZCD, TDE соответственно. Указанные описанные окружности равны в силу равенства хорд AB, BC, CD и DE и опирающихся на них вписанных углов, поэтому точки O_X, O_Y, O_Z, O_T лежат на окружности Ω с центром O.

При повороте вокруг O на $360°:9 = 40°$ по часовой стрелке, Ω_X переходит в Ω_Y, а треугольник XAB – в треугольник $X'BC$, вписанный в Ω_Y. По условию, $\angle YBX' = 20°$, откуда $\angle YO_YX' = 40°$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{O_X X}$ переходит в $\overrightarrow{O_Y Y}$ при композиции двух поворотов вокруг O на $40°$ в *разных* направлениях. Следовательно, $\overrightarrow{O_Y Y} = \overrightarrow{O_X X}$. Аналогично $\overrightarrow{O_T T} = \overrightarrow{O_Z Z} = \overrightarrow{O_Y Y}$. Значит, точки X, Y, Z, T лежат на окружности, получающейся из Ω сдвигом на вектор $\overrightarrow{O_X X}$.

6. [10] Петя прибавил к натуральному числу N натуральное число M и заметил, что сумма цифр у результата та же, что и у N. Тогда он снова прибавил M к результату, потом – ещё раз, и т. д. Обязательно ли он когда-нибудь снова получит число с той же суммой цифр, что и у N?

Александр Шаповалов

Ответ: не обязательно. **Решение**. *Пример*. Пусть $N = 2$, $M = 1008$. Число M кратно 16, поэтому все полученные Петей числа дают остаток 2 mod 16. Число с суммой цифр 2 представляется как сумма двух степеней десятки. Степени 1, 10, 10^2 и 10^3 дают остатки 1, 10, 4 и 8 при делении на 16, остальные степени кратны 16. Остаток 2 можно получить лишь двумя способами: 1 + 1 или 10 + 8, они соответствуют числам 2 и 1010. Значит, других чисел с суммой цифр 2 Петя получить не сможет.

7. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых – попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если **а**) [3] $N = 2$; **б**) [8] $N = 3$.

Сергей Токарев

Решение. Можно считать, что детектор выдаёт сумму номиналов *фальшивых* купюр в проверяемом наборе. Первая проверка – весь набор – даст сумму S номиналов всех фальшивых.

а) Вторая проверка – все купюры, меньшие $\frac{S}{2}$, – даст число X. В этом наборе ровно одна фальшивая, поэтому купюры с номиналами X и $S - X$ фальшивые.

Замечание. Во вторую проверку можно было взять по купюре из каждой пары с суммой S.

б) Назовём купюры и числа, меньшие $\frac{S}{3}$, *мелкими*, а остальные – *крупными*.

Вторая проверка – все мелкие купюры – даст число M. Теперь известна и сумма номиналов $K = S - M$ крупных фальшивых купюр. Заметим, что фальшивые есть и среди мелких, и среди крупных купюр. Поэтому возможны два вида троек фальшивых купюр:

(M_1, M_2, K), где числа M_1 и M_2 мелкие с суммой M, и (M, K_1, K_2), где K_1 и K_2 крупные с суммой K, а M мелкое.

Третья проверка – все купюры, меньшие $\frac{M}{2}$, и все крупные, меньшие $\frac{K}{2}$, – даст число X. Видно, что в этом наборе ровно одна фальшивая купюра. Поэтому, если число X мелкое, то тройка фальшивых – это (X, $M - X$, K), а если крупное, то – (M, X, $K - X$).

Замечание. Во вторую проверку можно взять наименьшую купюру от каждой тройки с суммой S. В третью проверку можно взять по одной купюре из каждой пары мелких с суммой M и из каждой пары крупных с суммой K.

Вариация решения пункта б).

Первая проверка – все купюры. После неё мы узнаем сумму номиналов всех настоящих купюр, а значит, и сумму номиналов всех фальшивых. Обозначим эту сумму через S_1. Построим таблицу, в которой три столбца, а в строках записаны в порядке возрастания все возможные тройки чисел, равные номиналам купюр, которые дают в сумме S_1.

Вторая проверка – все купюры, номиналы которых попали в первый столбец таблицы. После этой проверки мы будем знать сумму номиналов некоторых купюр в «фальшивой» тройке. Пусть эта сумма равна S_2. В неё точно входит число из первого столбца, так как соответствующая купюра участвовала в проверке. Также в неё может входить число из второго столбца. А вот числа из третьего столбца в ней точно нет, поскольку все числа первого столбца меньше $S_1/3$, а третьего – больше $S_1/3$, поэтому ни одно из чисел третьего столбца не может присутствовать в первом. Удалим из таблицы все строки, в которых ни первое число, ни сумма первого и второго не равны S_2.

Третья проверка – все купюры, номиналы которых находятся во втором столбце оставшейся таблицы. Заметим, что в каждой строке либо первое число равно S_2 и тогда второе число больше S_2, либо сумма первого и второго числа равна S_2 и тогда первое число меньше $S_2/2$, а второе – больше $S_2/2$, но меньше S_2. Значит, никакое число из первого столбца не может стоять во втором столбце. Кроме того, из этого следует, что все числа во втором столбце различны, иначе соответствующие тройки полностью совпадали бы.

Докажем, что и числа из третьего столбца не могли попасть во второй столбец. Предположим, что это не так, и в тройках (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) совпадают числа a_3 и b_2. Тогда $a_1 < a_2 < a_3 = b_2 < b_3$, а так как $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = S_1$, то $b_1 < a_1 < b_1 + b_2$ и $a_1 + a_2 > b_1 + b_2 > b_1$. Это противоречит тому, что в обеих тройках есть числа с суммой S_2.

Таким образом, результатом третьей проверки является номинал второй купюры в «фальшивой» тройке. А так как мы уже доказали, что во втором столбце нет равных чисел, то мы однозначно определим эту тройку.