**СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)*

---

| баллы | задачи | |
|---|---|---|
| 4 | 1. | На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.) *Егор Бакаев* |
| 4 | 2. | Дано натуральное число $n$. Для произвольного числа $x$ рассмотрим сумму $$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$ Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа $x$, то есть наибольшее целое число, не превосходящее $x$.) *Алексей Толпыго* |
| 5 | 3. | Пусть $I$ — центр вписанной окружности треугольника $ABC$, $N$ — основание биссектрисы угла $B$. Касательная к описанной окружности треугольника $AIN$ в вершине $A$ и касательная к описанной окружности треугольника $CIN$ в вершине $C$ пересекаются в точке $D$. Докажите, что прямые $AC$ и $DI$ перпендикулярны. *Михаил Евдокимов* |
| 5 | 4. | Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и $b_1, b_2, b_3, \ldots$ состоят из положительных чисел. Известно, что отношение $a_k/b_k$ целое при любом $k$. Верно ли, что это отношение не зависит от $k$? *Борис Френкин* |
| | 5. | Даны 5 точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены |
| 3 | а) | на плоскости; |
| 3 | б) | в пространстве? *Алексей Толпыго* |