СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 23 октября 2022 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

5 1. Какой наибольший рациональный корень может иметь уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — натуральные числа, не превосходящие 100?

Михаил Евдокимов

5 2. Даны два взаимно простых числа p, q, больших 1 и различающихся больше, чем на 1. Докажите, что найдется натуральное n, для которого

$$\text{НОК}(p+n, q+n) < \text{НОК}(p, q).$$

Михаил Малкин

6 3. Даны две концентрические окружности Ω и ω. Хорда AD окружности Ω касается ω. Внутри меньшего сегмента AD круга с границей Ω взята произвольная точка P. Касательные из P к окружности ω пересекают большую дугу AD окружности Ω в точках B и C. Отрезки BD и AC пересекаются в точке Q. Докажите, что отрезок PQ делит отрезок AD на две равные части.

Иван Кухарчук

7 4. В клетчатом квадрате между любыми двумя соседними по стороне клетками есть закрытая дверь. Жук начинает с какой-то клетки и ходит по клеткам, проходя через двери. Закрытую дверь он открывает в ту сторону, в которую идёт, и оставляет дверь открытой. Через открытую дверь жук может пройти только в ту сторону, в которую дверь была открыта. Докажите, что если жук в какой-либо момент захочет вернуться в исходную клетку, то он сможет это сделать.

Александр Перепечко

8 5. В бесконечной арифметической прогрессии, где все числа натуральные, нашлись два числа с одинаковой суммой цифр. Обязательно ли в ней найдётся ещё одно число с такой же суммой цифр?

Александр Шаповалов

6. Известно, что среди нескольких купюр, номиналы которых — попарно различные натуральные числа, есть ровно N фальшивых. Детектор за одну проверку определяет сумму номиналов всех настоящих купюр, входящих в выбранный нами набор. Докажите, что за N проверок можно найти все фальшивые купюры, если

2 а) $N = 2$;

7 б) $N = 3$.

Сергей Токарев

7. У N друзей есть круглая пицца. Разрешается провести не более 100 прямолинейных разрезов, не перекладывая части до окончания разрезаний, после чего распределить все получившиеся кусочки между всеми друзьями так, чтобы каждый получил суммарно одну и ту же долю пиццы по площади. Найдутся ли такие разрезания, если

5 а) $N = 201$;

5 б) $N = 400$?

Андрей Аржанцев