

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 26 марта 2023 года

1. Дана треугольная пирамида $SABC$, основание которой — равнобедренный треугольник ABC , а все плоские углы при вершине S равны α . При каком наименьшем α можно утверждать, что эта пирамида правильная?

М. Малкин

2. Существует ли целое $n > 1$, удовлетворяющее неравенству

$$[\sqrt{n-2} + 2\sqrt{n+2}] < [\sqrt{9n+6}]?$$

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

М. Малкин

3. В таблице 44×44 часть клеток синие, а остальные красные. Никакие синие клетки не граничат друг с другом по стороне. Множество красных клеток, наоборот, связно по сторонам (от любой красной клетки можно добраться до любой другой красной, переходя из клетки в клетку через общую сторону и не заходя в синие клетки). Докажите, что синих клеток в таблице меньше трети.

Б. Френкин

4. Дан треугольник ABC . Пусть I — центр его вписанной окружности, P — такая точка на стороне AB , что угол PIB прямой, Q — точка, симметричная точке I относительно вершины A . Докажите, что точки C, I, P, Q лежат на одной окружности.

И. Кухарчук, А. Юран

5. Назовём рассадку N кузнечиков на прямой в различные её точки k -удачной, если кузнечики, сделав необходимое число ходов по правилам чехарды, могут добиться того, что сумма попарных расстояний между ними уменьшится хотя бы в k раз. При каких $N \geq 2$ существует рассадка, являющаяся k -удачной сразу для всех натуральных k ? (В чехарде за ход один из кузнечиков прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.)

М. Святловский

6. В ряд слева направо стоят N коробок, занумерованных подряд числами $1, 2, \dots, N$. В некоторые коробки, стоящие подряд, положат по шарик, оставив остальные пустыми. Инструкция состоит из последовательно выполняемых команд вида «поменять местами содержимое коробок № i и № j », где i и j — числа. Для каждого ли N существует инструкция, в которой не больше $100N$ команд, со свойством: для любой начальной раскладки указанного вида можно будет, вычеркнув из инструкции некоторые команды, получить инструкцию, после выполнения которой все коробки с шариками будут левее коробок без шариков?

И. Митрофанов