

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев

- 5 2. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

- 7 3. Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын, Константин Кноп

- 8 4. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'SA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'SA'$ больше 120° , а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB' , BC' , CA' можно составить треугольник.

Давид Бродский

- 8 5. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

- 4 6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если

4 а) $N = 2$;

4 б) $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

- 10 7. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Александр Юран