45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

Базовый вариант

Старшие классы

1. [3] Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(–x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов a_n, …, a_1, a_0 (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

Борис Френкин

Ответ: не ошибается. **Решение**. Отметим действительные корни многочлена $P(x) + P(–x)$ на координатной прямой. Поскольку $P(x) + P(–x)$ – чётная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечётное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда $2a_0 = P(0) + P(–0) = 0$, откуда $a_0 = 0$.

Замечание: никакой другой коэффициент не определён условием однозначно.

2. [4] На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

Александр Юран

Ответ: не обязательно.

1-е решение. *Контрпример*. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – $\frac{1}{8}$ оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на $\frac{3}{8}$ оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены). Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через *чётное* число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечётное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

2-е решение. Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно α, $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь β и γ окажутся относительными скоростями стрелок), причём эти числа положительны. Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол δ градусов по часовой стрелке.

Тогда через t часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на αt градусов, средняя – на $(\alpha + \beta)t + \delta$ градусов, длинная – на $(\alpha + \gamma)t$ градусов.

Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$, или, что то же самое, $\delta = 3(\gamma - \beta)$.

Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$, то есть, $\delta = -7\beta$.

Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств $\beta = -\frac{\delta}{7}$, $\gamma = \frac{4\delta}{21}$.

Докажем, что при иррациональном δ все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа T, для которого попарные разности $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha T$, и $(\alpha + \gamma)T - \alpha T$ оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа $\delta + \beta T$ и γT целые и кратны 360.

Подставим значения β и γ. Получим, что для некоторого T будут целыми числа $\delta \cdot (1 - \frac{T}{7})$ и $\delta \cdot (\frac{4T}{21})$. Отсюда отношение $\frac{\delta \cdot (1 - \frac{T}{7})}{\delta \cdot (4\frac{T}{21})} = \frac{21}{4} \cdot \frac{1}{T} - \frac{3}{4}$ рационально. Но тогда и T рационально! Отсюда иррационально число $\delta \cdot (\frac{4T}{21})$ как произведение ненулевого рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

3-е решение. Пусть p и q – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями

p и q оборотов в час соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда p/q рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных.

Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через q часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через p часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при $p = 7$, $q = 3$ получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

3. [4] Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

Павел Кожевников

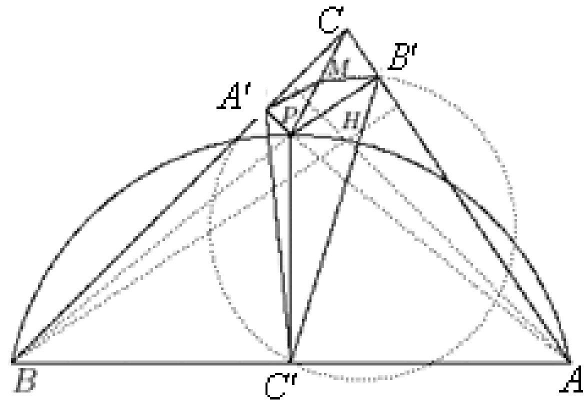
Ответ: 3^{100} чисел. **Решение**. Докажем по индукции, что есть ровно 3^n *хороших* n-значных чисел (кратных 2^n и составленных из указанных цифр). *База* ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Если у хорошего (n+1)-значного числа стереть первую цифру, получится хорошее n-значное число (поскольку, стирая цифру x, мы вычитаем из числа, кратного 2^{n+1}, число $x10^n$, кратное 2^n).

С другой стороны, хорошее n-значное число имеет вид $y \cdot 2^n$. Приписывая к нему слева цифру x, мы добавляем число $(x \cdot 5^n)2^n$, и сумма будет делиться на 2^{n+1} тогда и только тогда, когда число $y + x \cdot 5^n$ чётно, то есть, когда $x+y$ чётно. Видно, что для чётных y в качестве x подходят в точности чётные цифры 2, 4, 6, а для нечётного y – в точности нечётные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших (n+1)-значных чисел в 3 раза больше, чем хороших n-значных.

4. [5] Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' – проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.

Алексей Заславский



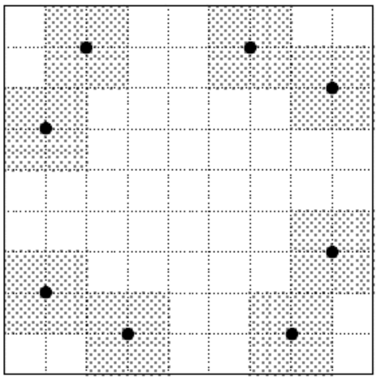
Решение. Пусть M – середина CP. Точки A' и B' лежат на окружности с диаметром CP и центром в M, а вписанный в эту окружность угол $A'CB'$ острый, поэтому $\angle A'MB' = 2\angle BCA$ и M лежит от прямой $A'B'$ по ту же сторону, что и C. Так как P лежит внутри остроугольного треугольника, её проекции A', B', C' лежат внутри сторон, тогда четырёхугольники $AB'PC'$ и $BA'PC'$ вписанные. Используя равенства вписанных углов, имеем:

$180° - \angle A'C'B' = \angle ACB' + \angle BC'A' = \angle BPA' + \angle APB' = 360° - \angle APB - \angle A'PB' =$ $= (180° - \angle AHB) + (180° - \angle A'PB') = \angle BCA + \angle BCA = 2\angle BCA$, откуда $\angle A'MB' + \angle A'C'B' =$ $= 180°$, то есть точки A', M, B', C' лежат на одной окружности, что и требовалось.

Замечание: Утверждение задачи остаётся верным для всякого треугольника ABC, в котором углы при вершинах A и B не прямые, и для произвольной точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABH и отличной от вершин треугольника ABC.

5. [6] У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына



Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов 2×2, содержит тогда ещё ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты 2×2 соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсечённый» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).