45-й Международный математический Турнир городов

2023/24 учебный год

Решения задач осеннего тура

Сложный вариант

Младшие классы

1. [4] В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Егор Бакаев

Ответ. Могло. **Решение**. *Пример 1*. Раскрасив доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, сначала во все чёрные клетки впишем единицы, а во все белые – двойки. Затем заменим угловую единицу на 6, а соседнюю с ней двойку – на 5 (см. рисунок справа).

1	**2**	**1**
2	**1**	**2**
6	**5**	**1**

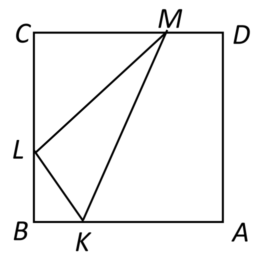
Пример 2 см. на рисунке ниже.

6	5	10	2	10	2	10	2
5	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10

2. [6] В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $^1/_6$.

Александр Юран

Решение 1. Возьмём точку внутри треугольника и спроектируем из неё вершины треугольника на контур квадрата *ABCD* и соединим проекции друг с другом. Получится новый треугольник, содержащий исходный. Если при этом две вершины нового треугольника окажутся на одной стороне квадрата, увеличим эту сторону треугольника так, чтобы она совпала со стороной квадрата (возможно, эту операцию придется повторить несколько раз). Достаточно доказать утверждение для последнего треугольника. Заметим, что *внутри* одной стороны квадрата (пусть AD) вершин треугольника нет. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M треугольника лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD (см. рисунок; возможно некоторые из них совпадают с вершинами квадрата).



Один из отрезков BL, CL (пусть CL) не меньше $^1/_2$. Если при этом $CM \geq {}^2/_3$, то $S_{LCM} \geq {}^1/_6$. Если же $CM < {}^2/_3$, то $S_{ADM} \geq {}^1/_6$.

Решение 2. Отрежем от квадрата нижнюю треть отрезком YZ и соединим концы отрезка с серединой X стороны CD (рис. 1). Площади треугольников CXY и DXZ равны по 1/6, поэтому внутри каждого из них есть вершина дыры (иначе эти треугольники можно отрезать). Площади треугольников BYA и BZA также равны по 1/6, поэтому оставшаяся вершина дыры лежит в каждом из них, то есть, лежит внутри треугольника BTA. Построив на каждой стороне квадрата такой треугольник (рис. 2), аналогично докажем, что внутри каждого из них лежит вершина дыры, что невозможно, так как треугольников четыре, а вершин три.

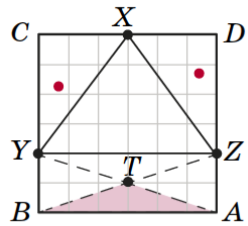


Рис. 1

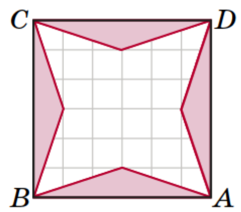


Рис. 2

3. [7] Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

Алексей Глебов

Ответ. За 3 хода. **Решение**. Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на разность $d - c$ чисел на второй карточке, получим карточку $(a(d - c), b(d - c))$. Вторым ходом получим из неё карточку $(c(b - a), d(b - a))$. Это можно сделать с помощью сложения, так как разность между нижним и верх-ним числами на каждой из этих карточек равна $(b - a)(d - c)$. Третьим ходом делим на разность $b - a$.

Докажем, что из карточки (1, 3) нельзя получить карточку (1, 4) меньше, чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

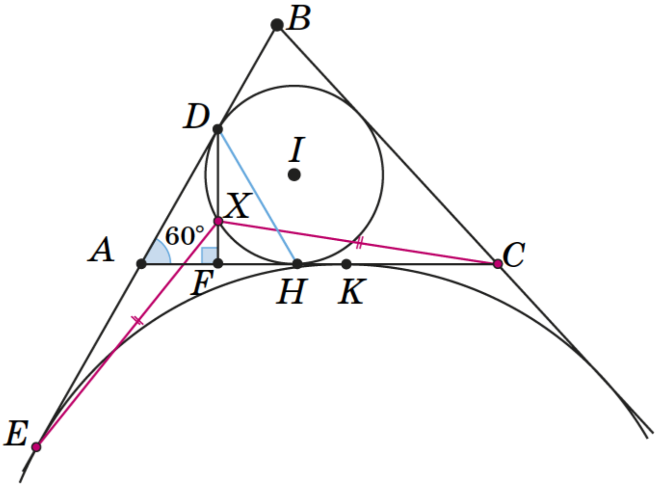
В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придётся вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. [7] Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Азамат Марданов

Решение. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X. Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH =$ $= 2\angle XDH = 60° = \angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, то есть является центром треугольника ADH.



По свойствам касательных вписанной и вневписанной окружностям, $AE = AK = CH$. Кроме того, $AX = HX$, $\angle EAX = 150° = \angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE = XC$.

5. [9] У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая – весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

Андрей Аржанцев

Решение. Будем всегда класть на чаши весов поровну гирь. Заметим, что тогда заведомо нефальшива гиря, оказавшаяся на лёгкой чаше, а в случае равенства – на любой из чаш. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Весы в равновесии. Тогда фальшива одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжёлой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжелая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

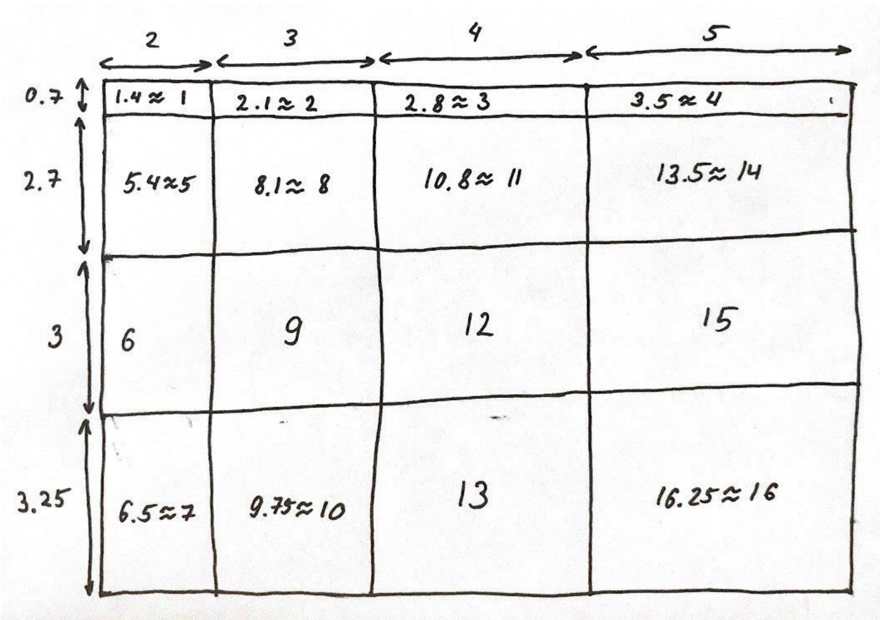
2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжёлой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжёлые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 ещё не взвешенных гирь, причём весы Y правильные (раз они показали равенство, все гири на них настоящие – в том числе, четыре гири, «тяжёлые» по мнению весов X, то есть весы X соврали). С их помощью найдём за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с её чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжёлая гиря.

6. [10] Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n - 1$ горизонтальных разрезов и $n - 1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Георгий Караваев

Ответ. Для $n = 4$. **Решение**. Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:



Докажем, что $n \leq 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов – слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad = bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать штрихами. Тогда $a' = 1$, $d' = n^2$, $b' \geq n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \geq 2n - 1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1{,}5$, $d < n^2 + 0{,}5$, $b \geq n - 0{,}5$, $c \geq 2n - 1{,}5$. Поэтому $1{,}5(n^2 + 0{,}5) > ad = bc > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$, откуда $1{,}5n^2 + 0{,}75 > 2n^2 - 2{,}5n + 0{,}75$, то есть $2{,}5n > 0{,}5n^2$, откуда $n < 5$.

7. [12] На белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

Александр Грибалко

7. Ответ: 197 ходов.

Алгоритм. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два.

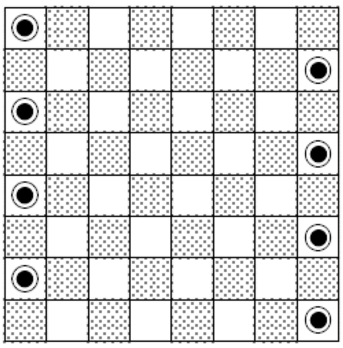
Если есть возможность сделать *экономичное* взятие (слон за один ход бьёт слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его.

В противном случае сделаем *неэкономичное* взятие (за два хода). Выберем двух слонов разного цвета и рассмотрим путь, по которому первый слон мог бы пройти ко второму за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть ещё слоны, найдём среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них собьёт другого за два хода.

Изначально все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоит не меньше двух слонов. Назовём двух из этих слонов *особыми*. Если особые слоны разного цвета, экономичное взятие возможно уже на первом ходу вдоль этой диагонали; сделаем его.

Пусть эти особые слоны белые. Тогда при взятиях будем бить чёрными слонами белых. После того как будет взят первый особый слон, это ограничение снимается. Заметим, что сразу после этого возможно экономичное взятие.

Поскольку всего взятий 99 и хотя бы одно из них экономичное, потребуется не больше $2 \cdot 99 - 1 = 197$ ходов.



Оценка. Расставим произвольным образом по 50 слонов на нижней и верхней строке доски. При этом на всех 199 белых диагоналях обоих направлений будут стоять слоны (угловые белые клетки доски мы считаем «одноклеточными» диагоналями). За ход число диагоналей, на которых есть слон, может уменьшиться не более, чем на 1 (поскольку «исчезнуть» может только та диагональ, с которой уходит слон, делающий ход). Когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, понадобится хотя бы $199 - 2 = 197$ ходов.