СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 29 октября 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

4 — 1. Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, …, 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

Алексей Глебов

5 — 2. Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

Алексей Глебов

3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

3 — а) Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

6 — б) Может ли количество прямоугольников равняться 23?

Александр Шаповалов

9 — 4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ площади S. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что $ABCD$ разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$.

Михаил Малкин

10 — 5. Хорда DE описанной около треугольника ABC окружности пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно, точка P лежит между D и Q. В треугольниках ADP и QEC провели биссектрисы DF и EG. Оказалось, что точки D, F, G, E лежат на одной окружности. Докажите, что точки A, P, Q, C лежат на одной окружности.

Азамат Марданов

12 — 6. Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, \dots, 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

Иван Кухарчук

14 — 7. На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n — по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

Александр Грибалко