СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 10 марта 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 — 1. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых $m!! = n!$. (Двойной факториал $m!!$ — это произведение всех натуральных чисел, не превосходящих m и имеющих ту же чётность, что m. Например, $5!! = 15$, $6!! = 48$).

Борис Френкин

6 — 2. В пространстве расположили конечный набор кругов радиуса 1. Круги могут пересекаться друг с другом, но не проходят через центры друг друга. В центре каждого круга зажгли точечную лампочку, светящую во все стороны. Могло ли случиться, что любой луч света, выходящий из центра любого круга, упирается в какой-то другой круг?

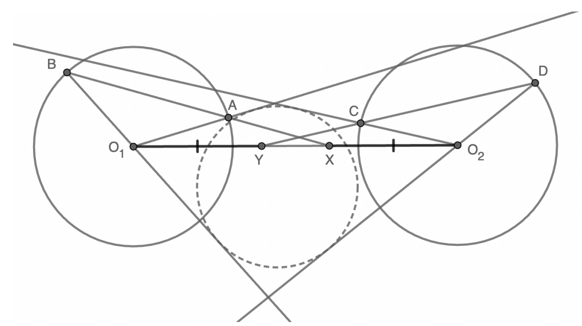
Марк Алексеев

7 — 3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку C *хорошей*, если в какой-то из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 1 больше, чем в C, а в какой-то другой из клеток, соседних с C по стороне, стоит число на 3 больше, чем в C. Каково наибольшее возможное количество хороших клеток?

Александр Чеботарев

8 — 4. Даны две равные окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2. На отрезке O_1O_2 взяты точки X и Y так, что $O_1Y = O_2X$. Точки A и B лежат на ω_1, и прямая AB проходит через X. Точки C и D лежат на ω_2, и прямая CD проходит через Y. Докажите, что существует окружность, касающаяся прямых AO_1, BO_1, CO_2 и DO_2.

Иван Кухарчук, Артемий Соколов



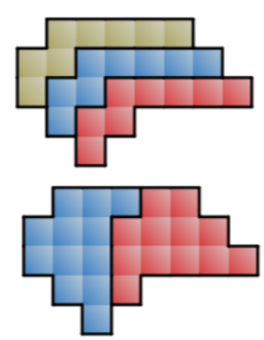
10 — 5. Дан многочлен степени $n > 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами, каждый из которых является его корнем. Докажите, что у этого многочлена не может быть никаких других коэффициентов, кроме 1, -1 и -2.

Леонид Шатунов

12 — 6. Кощей придумал для Ивана-дурака испытание. Он дал Ивану волшебную дудочку, на которой можно играть только две ноты — до и си. Чтобы пройти испытание, Ивану нужно сыграть какую-нибудь мелодию из 300 нот на свой выбор. Но до того, как он начнёт играть, Кощей выбирает и объявляет запретными одну мелодию из пяти нот, одну — из шести нот, ..., одну — из 30 нот. Если в какой-то момент последние сыгранные ноты образуют одну из запретных мелодий, дудочка перестаёт звучать. Сможет ли Иван пройти испытание, какие бы мелодии Кощей ни объявил запретными?

Виктор Клепцын

12 — 7. Назовём *полоской* клетчатый многоугольник, который можно пройти целиком, начав из какой-то его клетки и далее двигаясь только в двух направлениях — вверх или вправо. Несколько таких одинаковых полосок можно вставить друг в друга, сдвигая на вектор $(-1, 1)$. Докажите, что для любой полоски, состоящей из чётного числа клеток, найдётся такое нечётное k, что если объединить k таких же полосок, вставив их последовательно друг в друга, то полученный многоугольник можно будет разделить по линиям сетки на две равные части. (На рисунке приведён пример.)



Сергей Маркелов, Игорь Маркелов