СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 31 марта 2024 года

---

1. Дано натуральное число n. Можно ли представить многочлен $x(x-1)\ldots(x-n)$ в виде суммы двух кубов многочленов с действительными коэффициентами?

Б. Бутырин

2. Точки P, Q лежат внутри окружности ω. Серединный перпендикуляр к отрезку PQ пересекает ω в точках A и D. Окружность с центром D, проходящая через P и Q, пересекает ω в точках B и C. Отрезок PQ лежит внутри треугольника ABC. Докажите, что $\angle ACP = \angle BCQ$.

А. Заславский

3. В каждой клетке таблицы $N \times N$ записано число. Назовём клетку *хорошей*, если сумма чисел строки, содержащей эту клетку, не меньше, чем сумма чисел столбца, содержащего эту клетку. Найдите наименьшее возможное количество хороших клеток.

А. Глебов

4. Можно ли на плоскости из каждой точки с рациональными координатами выпустить луч так, чтобы никакие два луча не имели общей точки и при этом среди прямых, содержащих эти лучи, никакие две не были бы параллельны?

П. Кожевников

5. Вписанная сфера треугольной пирамиды $SABC$ касается основания ABC в точке P, а боковых граней — в точках K, M и N. Прямые PK, PM, PN пересекают плоскость, проходящую через середины боковых рёбер пирамиды, в точках K', M', N'. Докажите, что прямая SP проходит через центр описанной окружности треугольника $K'M'N'$.

Ф. Ивлев

6. У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45, делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке? (Каждый кусок — набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1.)

Т. Казицына