

46-й Международный математический Турнир городов 2024/25 учебный год, осенний тур, базовый вариант

Решения задач

Старшие классы

1. [3] В ряд лежат 100 камней: чёрный, белый, чёрный, белый, ..., чёрный, белый. Одной операцией либо выбирают два чёрных камня, между которыми лежат только белые камни, и перекрашивают все эти белые камни в чёрный цвет, либо выбирают два белых камня, между которыми лежат только чёрные камни, и перекрашивают все эти чёрные камни в белый цвет. Можно ли за несколько таких операций получить ряд, в котором идут сначала 50 чёрных камней, а потом 50 белых?

Егор Бакаев

Ответ. Нельзя. Назовём кластером максимальную группу подряд лежащих камней одного цвета.

Решение 1. В начале все кластеры нечётны: имеют длину 1. Заметим, что если в какой-то момент все кластеры нечётны, то после применения операции все будут нечётны: три нечётных кластера «склеиваются» в один. Поэтому никогда не появятся два чётных кластера.

Решение 2. Заметим, что 50-й камень – белый, а 51-й – чёрный. Оба их надо перекрасить. Один из этих двух камней перекрасится первым, после чего они станут одноцветными и далее уже всегда будут одноцветными (так как каждой операцией полностью перекрашивается какой-то кластер). Значит, сделать их чёрным и белым, как требуется, мы не сможем.

2. [4] У двух многочленов с вещественными коэффициентами старшие коэффициенты равны 1. У каждого многочлена степень нечётна и равна числу его различных вещественных корней. Произведение значений первого многочлена в корнях второго равно 2024. Найдите произведение значений второго многочлена в корнях первого.

Сергей Янжинов

Ответ: – 2024.

Решение. Пусть $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)$, $Q(x) = (x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)$. По условию $\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^m (b_j - a_i) = 2024$. Надо найти $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (a_i - b_j)$. Поскольку m и n нечётны, оно от первого отличается знаком.

3. [5] В ряд записаны 5 натуральных чисел. Каждое из них, кроме первого, – наименьшее натуральное число, на которое не делится предыдущее. Могут ли все пять чисел быть различными?

Борис Френкин

Ответ: не могут.

Ответ: не могут.

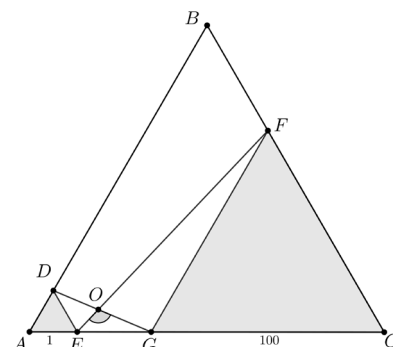
Решение 1. Пусть n – первое число в строке. Если n делится на какие-то степени (с натуральными показателями) различных простых чисел, то оно делится и на произведение этих степеней. Поэтому наименьшее число, на которое не делится n , – степень (возможно, первая) какого-то простого числа p . Если $p = 2$, то третье число в строке равно 3, четвёртое равно 2, а пятое снова 3. Если же p нечётно, то третье число равно 2, четвёртое 3 и пятое снова 2. В любом случае пятое число равно третьему.

Решение 2. Пусть записаны числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Рассмотрим три случая.

- 1) a_2 нечётно. Тогда $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 2$.
- 2) a_2 чётно но не кратно 3. Тогда $a_3 = 3, a_4 = 2, a_5 = 2$.
- 3) $a_2 = 2^k 3^l m$, где $k, l > 0, m$ не кратно ни 2, ни 3. Тогда a_1 делится на $2^k, 3^l$ и m , но не делится на a_2 . Противоречие.

4. [5] В равностороннем треугольнике ABC проведены отрезки ED и GF , так что образовались два равносторонних треугольника ADE и GFC со сторонами 1 и 100 (точки E и G лежат на стороне AC). Отрезки EF и DG пересекаются в точке O , причём угол EOG равен 120° . Чему равна сторона треугольника ABC ?

Михаил Евдокимов



Ответ: 111.

Решение. Заметим, что $\angle FEG = \angle OEG = 60^\circ - \angle OGE = 60^\circ - \angle DGE = \angle GDE$. Значит, треугольники FGE и GED подобны по двум углам (ведь ещё $\angle DEG = \angle FGE = 120^\circ$), откуда $FG : GE = GE : ED$, поэтому $GE = \sqrt{FG \cdot ED} = \sqrt{100 \cdot 1} = 10$, и далее $AC = 1 + 10 + 100 = 111$.

5. [5] Имеются чашечные весы без гирь и две кучи камней неизвестных масс, по 10 камней в каждой куче. Разрешается проводить сколько угодно взвешиваний, но на каждую чашу помещается не более 9 камней. Всегда ли можно узнать, какая из куч тяжелее, или установить равенство их масс?

Сергей Дориченко

Ответ: не всегда.

Решение. Пусть нам даже известны массы всех камней, кроме одного: в первой куче все камни по 10 г, во второй – 9 камней по 1 г и один камень массой больше 90 г (назовём его большим). Тогда результаты взвешиваний без большого камня нам и так известны заранее, а при любом взвешивании с участием большого камня перевесит чаша, на которой он лежит.

При этом масса первой кучи равна 100 г, а масса второй – любое число, большее 99 г. Если оно при этом меньше 100 г, то тяжелее первая куча, если больше 100 г – то вторая. Поэтому сравнить кучи не удастся.