

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ ВЕСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

10 – 11 классы,

1 [4]. Найдите наименьшее натуральное число, у которого найдутся четыре различных натуральных делителя с суммой 2025.

(Марк Алексеев)

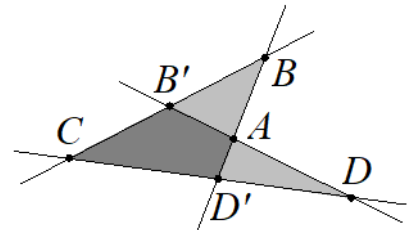
Ответ: 972. Сумма четырёх различных делителей числа n не больше $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{4} = \frac{25n}{12}$. Поэтому n будет самым маленьким в случае, когда $\frac{25n}{12} = 2025$, то есть $n = 972$. Это число подходит, так как 972 делится на 2, 3 и 4.

2 [4]. На плоскости провели 100 прямых, среди них никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Рассмотрим всевозможные четырёхугольники, все стороны которых лежат на этих прямых (в том числе четырёхугольники, внутри которых проведены линии). Обязательно ли выпуклых среди них столько же, сколько невыпуклых?

(Егор Бакаев)

Ответ: обязательно.

Рассмотрим произвольный невыпуклый четырёхугольник $ABCD$ из условия (угол A больше 180°). Продлив его стороны BA и DA до пересечения со сторонами DC и BC , получим выпуклый четырёхугольник $AB'CD'$ (см. рисунок). Обратно, продлив стороны выпуклого четырёхугольника, получим невыпуклый. Таким образом, все четырёхугольники разбиваются на пары выпуклый-невыпуклый.



3 [5]. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, несколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

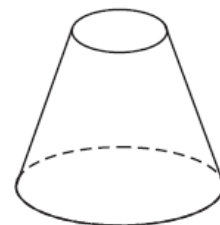
Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n-1)$ -м кувшине — с помощью n -го, в n -м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n -го. Если чан сладкий, то n -й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n -й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

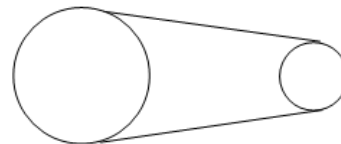
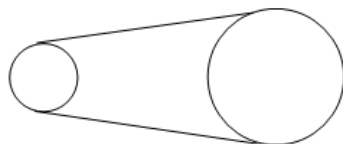
4 [5]. На плоскости стояло ведро, верхнее основание больше нижнего. Ведро перевернули. Докажите, что площадь его видимой тени уменьшилась. (Ведро — это прямой круговой усечённый конус: его основания — два круга, лежащие в параллельных плоскостях, центры кругов лежат на прямой, перпендикулярной этим плоскостям. Видимая тень — это вся тень, кроме тени под ведром. Солнечные лучи считайте параллельными.)



(Максим Дидин)

Верхнее основание параллельно плоскости, поэтому оно параллельно перенесётся светом. (То есть, тень круга, параллельного плоскости, — круг того же размера, лежащий в плоскости основания, с центром в «тени» центра круга.)

Усечённый конус является выпуклой оболочкой своих оснований. Поэтому полная тень в обоих случаях — это выпуклая оболочка двух кругов, равных основаниям. При переворачивании ведра центры оснований меняются местами друг с другом, поэтому соединяющий их отрезок одинаково спроектируется в обоих случаях. Следовательно, полные тени равны (симметричны друг другу).



(На рисунке изображен случай, когда тени верхнего и нижнего оснований не пересекаются, но они могут пересекаться; меньшая тень даже может лежать внутри большей.)

Видимая тень получается удалением из полной тени нижнего основания. Поэтому у перевернутого ведра видимая тень меньше.

5 [6]. Дан многочлен с целыми коэффициентами, имеющий хотя бы один целый корень. Наибольший общий делитель всех его целых корней равен 1. Докажите, что если старший коэффициент многочлена равен 1, то наибольший общий делитель остальных коэффициентов тоже равен 1.

(Борис Френкин)

Пусть наш многочлен имеет вид $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$. Предположим противное: остальные коэффициенты многочлена имеют общий простой делитель p . Тогда, если s — целый корень многочлена, то $f(s) = 0$, откуда $s^n = -(a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)$ делится на p . Но тогда и s делится на p (так как p — простое). Значит, наибольший общий делитель всех целых корней делится на p . Противоречие.