

1 (4 балла). Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?

(Максим Дидин)

Ответ: может. Назовём числа, начинающиеся на 1 или 2, *мелкими*, а начинающиеся на 7, 8 или 9, — *крупными*. Заметим, что сразу после каждого крупного числа на доске появится мелкое. В самом деле, если в крупном числе A всего k разрядов, то $7 \cdot 10^{k-1} \leq A < 10^k$, откуда $1,4 \cdot 10^k \leq 2A < 3A < 3 \cdot 10^k$, то есть, после A появится число, в котором k разрядов, а первая цифра — 1 или 2. Поэтому, если второе мелкое число появится на доске раньше первого крупного, то крупных чисел всегда будет меньше.

Петя может начать, например, с мелкого числа 112. Чтобы помешать Пете, Вася вынужден умножить его на 3 (получится 336), потом на 2 (672). Умножение 672 как на 2, так и на 3 даст мелкое число. Есть много других примеров: скажем, он может начать с числа 17.

2 (6 баллов). Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.

(Александр Юран)

Рассмотрим 20 клеток, «нанизанных» на главную диагональ. Они принадлежат 20 разным доминошкам. Центры этих доминошек лежат на двух прямых, параллельных главной диагонали, поэтому на одной из этих прямых таких центров не меньше 10.

Комментарий. На самом деле, на каждой из этих двух прямых лежит ровно по 10 центров. Это следует из того, что ровно 10 доминошек, «нанизанных» на диагональ, смотрят в одну из половин доски, а оставшиеся 10 — в другую. (Проверьте, раскрасив доску в шахматном порядке и подсчитав количество клеток каждого цвета в каждой из половин.)

3 (7 баллов). Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?

(Александр Буфетов)

Ответ: нет. **Первый способ.** Расположим исходный прямоугольный параллелепипед так, чтобы две противоположные непрямоугольные грани были горизонтальны. Пусть для него квадрат объёма равен произведению площадей трёх граней. Передвинем верхнюю грань так, чтобы она осталась на той же высоте над нижней гранью, но чтобы теперь боковые рёбра были перпендикулярны нижней грани. Объём параллелепипеда не поменяется, а площади боковых граней разве что уменьшатся (высоты параллелограммов станут минимальными возможными), поэтому для нового параллелепипеда квадрат объёма будет больше или равен произведению площадей граней. С другой стороны, теперь (если не учитывать один и тот же множитель — квадрат произведения трёх рёбер, выходящих из одной вершины) квадрат объёма равен по сути квадрату синуса угла в верхней грани, а произведение площадей граней равно по сути синусу угла верхней грани, то есть квадрат объёма меньше произведения площадей граней — противоречие.

Второй способ. Пусть такой параллелепипед существует. Если увеличить одно из его рёбер в k раз, то как произведение площадей трёх граней, так и квадрат объёма увеличатся в k^2 раз. Поэтому можно считать, что все рёбра равны 1, то есть все грани — ромбы. Если одна из граней — не квадрат, то её площадь $S < 1$. Площади двух остальных граней равны их высотам H_2 и H_3 , а объём равен Sh , где h — высота, опущенная на первую грань. Тогда $SH_2H_3 = (Sh)^2$, то есть $H_2H_3 < h^2$. Но $h \leq H_2$ (по теореме о трёх перпендикулярах H_2 — гипотенуза, а h — катет прямоугольного треугольника, возможно, вырожденного). Аналогично $h \leq H_3$. Противоречие.

Вариация. Пусть a, b, c — стороны параллелепипеда, h — его высота, опущенная на грань со сторонами a и b . Тогда $V^2 = S_{ab}S_{bc}S_{ca} \geq S_{ab} \cdot b \cdot h \cdot a \cdot h \geq S_{ab}S_{ab}h^2 = V^2$. Из равенства следует, что $a \perp b$. Аналогично, $b \perp c$ и $c \perp a$.

4 (8 баллов). Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots?$$

(Илья Лобачкий)

Ответ: существует.

Решение 1. Подходит последовательность, где $a_k = 1/k$, если k степень двойки, и $a_k = 0$ иначе.

Решение 2 (для знатоков). Положим $a_k = \frac{1}{k^s}$. Найдётся такое s , что

$$\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = 1,$$

так как дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

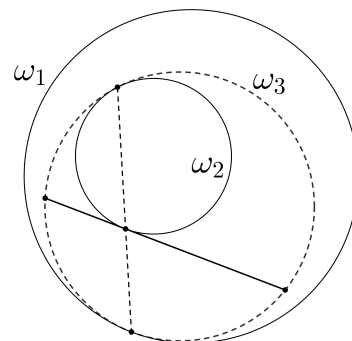
непрерывна при $s > 1$, причём $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2$ и $\zeta(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow 1$. Тогда

$$a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots = \frac{1}{(2k)^s} + \frac{1}{(3k)^s} + \frac{1}{(4k)^s} + \dots = \frac{1}{k^s} \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots \right) = \frac{1}{k^s} \cdot 1 = a_k.$$

Примечание. Подойдёт любая последовательность $a_1, a_2, \dots$ с первым членом 1 и общей суммой 2, которая мультипликативна — для любых натуральных m и n выполнено $a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n$.

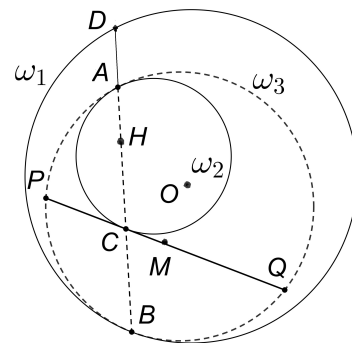
5 (10 баллов). Дана окружность ω_1 , а внутри неё — окружность ω_2 . Выбирают произвольную окружность ω_3 , которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3 . Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.

(Павел Кожевников)



Пусть A и B — точки касания окружности ω_3 с окружностями ω_2 и ω_1 соответственно, C — точка пересечения отрезка AB с окружностью ω_2 , и PQ — хорда окружности ω_3 , касающаяся ω_2 в точке C .

Для каждой пары из окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ рассмотрим центр гомотетии, переводящий одну окружность в другую. По теореме о трех гомотетиях, эти три точки лежат на одной прямой. Поскольку центр гомотетии, переводящей касающиеся окружности одна в другую, совпадает с их точкой касания, получаем, что отрезок AB проходит через центр H гомотетии, переводящей ω_1 в ω_2 . Тогда хорда PQ параллельна проходящей через точку B касательной к ω_1 , и серединный перпендикуляр к хорде PQ проходит через центр O окружности ω_1 . Пусть M — середина хорды PQ . Не теряя общности, M лежит на отрезке CQ . Тогда



$$OP^2 = (OC^2 - CM^2) + MP^2 = OC^2 + (MP - CM)(MP + CM) = OC^2 + PC \cdot CQ = OC^2 + AC \cdot BC.$$

Докажем, что эта величина не зависит от выбора окружности ω_3 , то есть концы всех хорд PQ равноудалены от O . Для этого продлим CA до пересечения с ω_1 в точке D . Пусть R и r — радиусы окружностей ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда

$$AC \cdot BC = (CD - AD) \cdot BC = CD \cdot BC - AD \cdot BC.$$

Заметим, что $CD \cdot BC = R^2 - OC^2$ — степень точки C относительно окружности ω_1 . Поэтому $OP^2 = R^2 - AD \cdot BC$. Осталось доказать, что величина $AD \cdot BC$ не зависит от выбора ω_3 .

Так как H — центр гомотетии, переводящий ω_1 в ω_2 , то

$$\frac{R}{r} = \frac{HD}{HA} = 1 + \frac{AD}{HA}, \quad \text{откуда} \quad AD = HA \cdot \left(\frac{R}{r} - 1 \right); \quad \text{аналогично,} \quad BC = HC \cdot \left(\frac{R}{r} - 1 \right).$$

Тогда

$$AD \cdot BC = \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \cdot HA \cdot HC = \left(\frac{R}{r} - 1 \right)^2 \cdot s,$$

где s — степень точки H относительно окружности ω_2 , то есть, величина, не зависящая от выбора ω_2 .

6 (12 баллов. *Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов.*

Число m назовём волшебным числом замка, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

(Тимофей Васильев)

Ответ: $m = 1000$. Сначала докажем, что 1000 мудрецов всегда смогут выдержать испытание, независимо от того, как располагаются комнаты и коридоры в замке. Для этого мудрецы договариваются о следующем: каждый коридор закрепляется за каким-то конкретным мудрецом, который всегда находится в одной из комнат на концах этого коридора и переходит по нему, когда на этот коридор указывает Мерлин. Отсюда следует, что $m \leq 1000$. Докажем, что $m \geq 1000$.

Первый способ. Покажем, что при 999 мудрецах у Мерлина есть план победы.

Для удобства предположим, что если мудрец выходит из комнаты, то он — самый младший из тех, кто в ней находился (в действительности совершенно неважно, кто из мудрецов где, важно только их количество в каждой из комнат).

Докажем, что если мудрецов в замке меньше, чем коридоров, то Мерлин может выбирать коридоры так, чтобы через несколько ходов вне зависимости от действий мудрецов образовался пустой коридор (обе комнаты на его концах пустые).

Индукция по числу мудрецов. База индукции очевидна: если коридоры есть, а мудрецов нет, то есть пустой коридор.

Переход индукции. Сначала покажем, что Мерлин может получить одну пустую комнату, из которой ведёт хотя бы один коридор. Возьмём самого старшего мудреца M . Если в результате команд Мерлина мудрец M покидает свою комнату, то эта комната становится пустой и будет искомой. Поэтому мы можем считать, что M всегда остаётся на своём месте вне зависимости от действий Мерлина. Наденем на M мантию-невидимку, по предположению индукции, Мерлин может получить две соседние комнаты, в которых никого нет (кроме, возможно, M). Таким образом, получена пустая комната, из которой ведёт хотя бы один коридор.

Пусть есть пустая комната v . Пусть из неё выходят коридоры $e_1, \dots, e_k$ и ведут в комнаты $v_1, \dots, v_k$. Назовём эти k комнат *уютными*, а эти k коридоров *опасными*. Если среди уютных комнат есть пустая, то Мерлин уже победил. Иначе выберем в этих комнатах по мудрецу (мудрец M_i находится в комнате v_i), назовём их *важными*. Не теряя общности, мы можем считать, что k самых пожилых мудрецов — это важные мудрецы.

Запретим Мерлину выбирать опасные коридоры и наденем на важных мудрецов по мантии-невидимке (то есть, мысленно удалим из замка k важных мудрецов и k коридоров вместе с вершиной v). По предположению индукции, у видимых мудрецов нет стратегии защиты от Мерлина. Это значит, что Мерлин может выбирать коридоры таким образом, что в исходном замке в какой-то момент или образуется пустой коридор, или один из важных мудрецов M_i должен будет выйти из своей комнаты v_i . В последнем случае в этот момент Мерлин получит две соседние пустые комнаты (v_i, v) .

Второй способ. Занумеруем все комнаты от 1 до n в любом порядке. Пусть A_i — число мудрецов в комнате i , а k_i — число коридоров, ведущих из неё в комнаты с меньшими номерами.

Если $A_i < k_i$ для какой-то комнаты i , то Мерлин указывает эти k_i коридоров в порядке убывания номеров их концов до момента, когда случится переход мудреца в комнату i из некоторой комнаты j (где $j < i$). Получится расположение мудрецов $B = (B_1, \dots, B_n)$, лексикографически меньшее расположения A , то есть $B_1 = A_1, \dots, B_{j-1} = A_{j-1}$, но $B_j < A_j$.

Затем Мерлин ищет в расположении B неравенство $B_l < k_l$, аналогично получает меньшее расположение и так далее. Число расположений конечно. Значит, если мудрецы не проиграют в этом процессе, то когда-то получится расположение M , в котором $M_i \geq k_i$ для всех i . Тогда

$$m \geq M_1 + \dots + M_n \geq k_1 + \dots + k_n = 1000,$$

то есть $m \geq 1000$.

7 (14 баллов). На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)

(Владимир Дольников, Павел Кожеевников)

Ответ: всегда.

Для удобства выберем единицу измерения так, чтобы площадь каждой салфетки равнялась 1. Рассмотрим часть плоскости, покрытую салфетками. Границы салфеток делят её на несколько (пусть k) областей. Занумеруем эти области числами от 1 до k и введём переменные $x_1, \dots, x_k$ — искомые количества гвоздей, которые мы в итоге вобьём в соответствующие области.

Если можно было бы вбивать нецелое число гвоздей, достаточно было бы в каждую область вбить число гвоздей, равное её площади! Тогда каждая салфетка была бы прибита одним гвоздём. Если все эти площади рациональные, можно домножить их на общий знаменатель и получить одно и то же целое число гвоздей в каждом круге. Но что делать, если какие-то части имеют иррациональные площади? Далее можно пойти двумя путями.

Первое решение. Составим систему: для каждой салфетки просуммируем переменные, соответствующие областям, на которые разбита салфетка, и приравняем к 1. Получится система линейных уравнений с рациональными коэффициентами от переменных $x_1, \dots, x_k$. Хотя какое-то решение у этой системы существует (например, каждую переменную можно взять равной площади соответствующей части). Докажем, что у системы есть решение в положительных рациональных числах (тогда, домножив числа на общий знаменатель, получим решение исходной задачи).

Будем решать систему методом Гаусса: выразим одну переменную из первого уравнения и подставим в остальные, затем из второго уравнения выразим следующую переменную и подставим в уравнения с 3-го по последнее, и так далее. Так дойдём до конца и получим систему, равносильную исходной.

Возможно, в каких-то уравнениях после подстановки всё сократится, и они примут вид $0 = 0$ — не страшно. Последнее из уравнений, в котором не всё сократится, будет тогда иметь вид

$$x_i = r_i + r_j x_j + \dots + r_n x_n,$$

где $r_j, \dots, r_n$ — какие-то коэффициенты, которые, конечно же будут, рациональными!

Это значит, что переменным $x_j, \dots, x_n$ мы можем придать любые значения — такие переменные называются «свободными». По их значениям мы однозначно найдём значение x_i . Подставив уже найденные значения в предыдущее уравнение, найдём значение очередной переменной, и так далее. Встречающиеся по дороге свободные переменные можно заменять любыми числами.

В итоге все переменные выразятся через рациональные константы и конечный набор так называемых «свободных» переменных, которым мы можем придавать любые значения, и по этим значениям однозначно получать какое-то решение системы.

Поэтому, если свободных переменных нет, то решение у системы единственное и тогда оно состоит из рациональных чисел!

Пусть свободные переменные есть. Мы можем придать каждой такой переменной x_j рациональное значение, сколь угодно близкое к площади j -й области. Ясно, что можно взять настолько близкие к площадям положительные рациональные значения, чтобы остальные, «несвободные» переменные также получились положительными (ведь каждая несвободная переменная x_i есть конечная линейная комбинация не более чем из k слагаемых с фиксированными коэффициентами, и подставляя в эту комбинацию числа, очень близкие к исходным площадям, мы получим число, близкое к соответствующей площади, которая изначально положительна). В итоге получим искомое рациональное решение.

Второе решение. Пусть $s_1, \dots, s_k$ — площади соответствующих областей, на которые разбиты салфетки. Воспользуемся такой леммой (её доказательство можно прочесть, например, в статье С. Дориченко «О коровах, линейной алгебре и многомерных пространствах», «Квант» №5, 2012):

Пусть даны произвольные действительные числа $s_1, s_2, \dots, s_k$. Тогда, какое бы положительное число ε мы ни взяли, найдется такое натуральное число M , что каждое из чисел $s_1 M, \dots, s_k M$ будет отличаться от ближайшего к нему целого числа не больше, чем на ε .

Выберем ε равным $\frac{1}{2k}$ и найдём нужное M . Тогда каждое из чисел $s_i M$ равно $N_i + \delta_i$, где N_i натуральное, а $|\delta_i| \leq \frac{1}{2k}$.

Если теперь для каждой салфетки сложить домноженные на M площади областей, на которые салфетка разбита, мы получим, с одной стороны, просто M (так как вся площадь салфетки тоже домножилась на M), а с другой стороны мы получим сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых натуральное с точностью до $\frac{1}{2k}$. Нецелые добавки суммарно составляют тогда не более $\frac{1}{2}$, и значит, взаимно уничтожаются, чтобы в итоге получилось целое число. Тогда если мы эти добавки отбросим, то для каждой салфетки сумма соответствующих натуральных чисел N_i по-прежнему будет равна M — одному и тому же числу! Поэтому выбрав для каждой части число гвоздей, равное соответствующему числу N_i , мы получим, что каждая салфетка будет прибита M гвоздями.

Комментарий. Как видно из решения, утверждение задачи верно для любого конечного числа салфеток одинаковой площади (при этом салфетки могут иметь разную форму).

Если же попробовать усилить задачу в другом направлении — потребовать, чтобы в каждую салфетку-единичный круг был вбит ровно один гвоздь, утверждение перестанет быть верным — см. задачу M1390 из Задачника «Кванта» №2 за 1993 г.