

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ ВЕСЕННИЙ ТУР

Сложный вариант

10 – 11 классы

1 [5]. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \dots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x , то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x .)

(Алексей Толпыго)

Ответ: существует.

Решение 1. Возьмём $x = 10^{100} + 0,1$. Тогда

$$x^n = 10^{100n} + C_n^1 10^{100(n-1)}(0,1) + \dots + C_n^{n-1} 10^{100}(0,1)^{n-1} + (0,1)^n,$$

откуда $\{x_n\} = (0,1)^n$ при $n \leq 100$.

Решение 2. Возьмём $x = 2 - \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 2^{-200}$. Тогда

$$x^n = 2^n - 2^{n-1}n\varepsilon + R\varepsilon^2,$$

где

$$|R| < 2^{n-2}(C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n) < 2^{200}$$

при $n \leq 100$, откуда

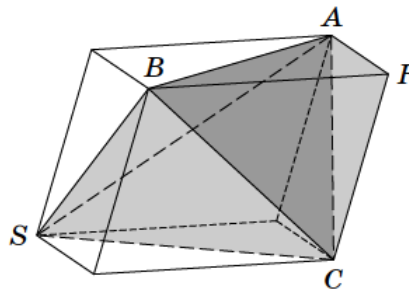
$$(2^{n-1}n - 1)\varepsilon < 1 - \{x^n\} < (2^{n-1}n + 1)\varepsilon < 1.$$

Следовательно, $0 < 1 - \{x\} < 1 - \{x^2\} < 1 - \{x^{100}\}$, что и требовалось.

2 [6]. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC . Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC . Оказалось, что рёбра SA, SB, SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR, ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

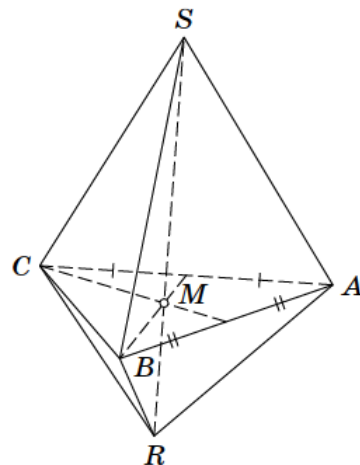
(Михаил Евдокимов)

Первый способ. Пусть рёбра SA, SB, SC параллельны граням BCR, ACR и ABR соответственно. Проведём через SA, SB, SC плоскости, которые параллельны BCR, ACR и ABR соответственно. Получается параллелепипед, пять вершин которого совпадают с вершинами наших пирамид (рисунок справа). Пусть V — объём этого параллелепипеда.



Тогда объём пирамиды $RABC$ равен $\frac{V}{6}$, как и объём трёх других пирамид, основаниями которых являются грани тетраэдра $SABC$. Поэтому объём пирамиды $SABC$ равен $V - 4\frac{V}{6} = 2 \cdot \frac{V}{6}$, то есть вдвое больше объёма пирамиды $RABC$, что и требовалось доказать.

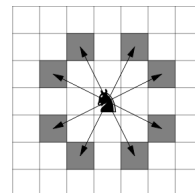
Второй способ. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рисунок справа). Пусть α, β, γ — плоскости, проходящие через точки A, B, C , параллельные плоскостям BCR, ACR, ABR соответственно. Поскольку $SA \parallel BCR$, точка S лежит в плоскости α . Аналогично, она лежит и в плоскостях β и γ . Пусть R' — образ точки R при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2 . При этой гомотетии середина отрезка BC переходит в A , поэтому плоскость BCR переходит в плоскость α . Значит, $R' \in \alpha$. Аналогично, $R' \in \beta$ и $R' \in \gamma$. Плоскости ABR, BCR, ACR имеют единственную общую точку, поэтому их образы α, β, γ при рассматриваемой гомотетии тоже имеют единственную общую точку. Таким образом, получаем, что $R' = S$.



По построению точки R' расстояние от неё до плоскости ABC в два раза больше, чем расстояние от R до этой плоскости, поэтому объём пирамиды $R'ABC$ (она же $SABC$) вдвое больше объёма пирамиды $RABC$.

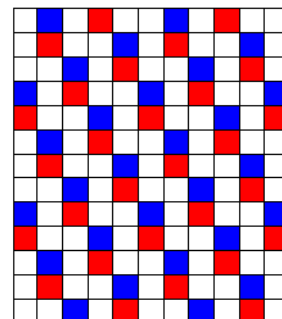
3 [7]. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других? (Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)

(Александр Тертерян)

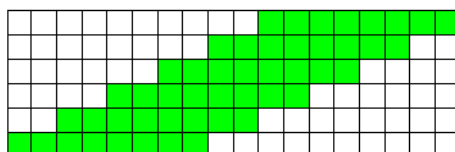


Ответ: можно.

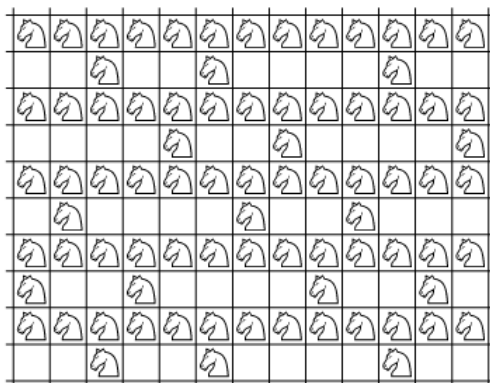
Способ 1. Выложим на плоскости красно-синие доминошки, как на рисунке справа (показан кусок бесконечного паркета), и поставим коней на все цветные клетки. Каждый конь бьёт четырёх коней на клетках своего цвета и одного на клетке другого цвета.



Способ 2. Поставим коней на зелёные клетки рисунка ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Способ 3. Поставим коней, как показано на рисунке ниже (показан кусок бесконечного паркета).



Замечание 1. Приведённые способы расстановки коней принципиально различаются тем, что в первом примере «плотность коней» — $2/5$, во втором — нулевая, а в третьем — $5/8$. Подумайте, какие ещё значения плотности реализуются.

Замечание 2. Можно раскрасить всю плоскость в 5 цветов, как показано на рисунке ниже. При этом конь в каждой клетке каждого цвета будет бить четыре клетки того же цвета и по одной клетке каждого из остальных цветов. Таким образом, для построения примера к задаче достаточно выбрать какие-то два цвета и поставить коней на все клетки этих цветов. Аналогично можно построить пример, в котором каждый конь бьёт 6 или 7 других: для этого достаточно взять все клетки трёх или четырёх цветов.

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

4 [8]. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

(Александр Шаповалов)

Ответ: $n = k(k + 1)$.

Оценка. Пусть используются купюры достоинств P и Q . Пусть купюр в платеже ровно m . Если сдача не нужна, то есть $m + 1$ вариант: от 0 до m купюр P , остальные — Q . Если есть сдача, то платят купюрами одного вида, а сдачу дают купюрами другого вида. Тогда возможен $m - 1$ вариант: используется от 1 до $m - 1$ купюр P , остальные — Q . Всего для m купюр есть $2m$ вариантов. Суммируя по всем возможным m , получим $2(1 + 2 + \dots + k) = k(k + 1)$ возможных вариантов сумм.

Пример. Будем использовать купюры в k и $k + 1$ тугрик. Докажем, что любая сумма от 1 до $k(k + 1)$ тугриков представляется в виде $ak + b(k + 1)$, где $|a| + |b| \leq k$.

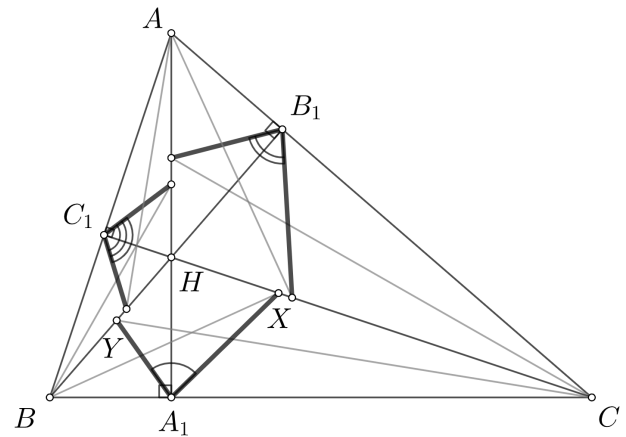
Сначала докажем, что все такие представления дают разные суммы. Пусть эта же сумма представлена иначе $ck + d(k + 1)$. Поскольку и тут $|c| + |d| \leq k$, то $|a| + |b| + |c| + |d| \leq 2k$.

Из равенства $ak + b(k + 1) = ck + d(k + 1)$ следует, что $(a - c)k = (d - b)(k + 1)$. Тогда $a - c$ кратно $k + 1$, $d - b$ кратно k , и обе разности не равны 0. Значит, $k + 1 \leq |a - c| \leq |a| + |c|$, $k \leq |d - b| \leq |d| + |b|$, откуда $2k + 1 \leq |a| + |b| + |c| + |d|$. Противоречие.

Итак, все представления указанного вида дают разные суммы. Так как максимальная сумма равна $k(k + 1)$, все суммы целые, и всего их $k(k + 1)$, то получаются все суммы от 1 до $k(k + 1)$.

5 [10]. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

(Алексей Доledenok)

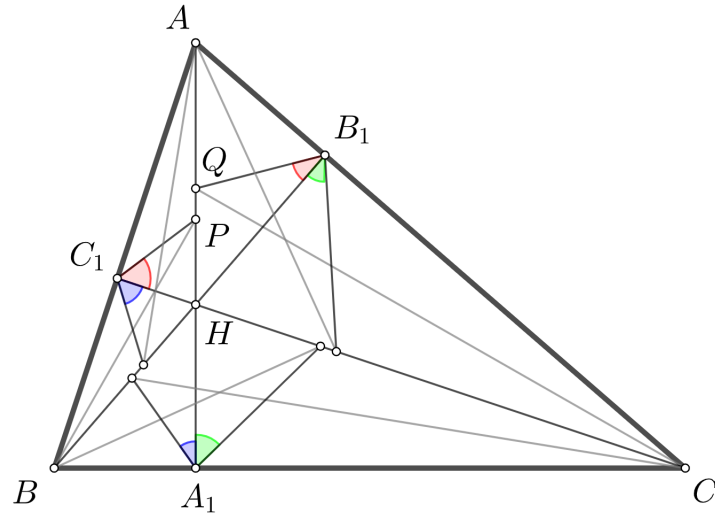


Ответ: 270° .

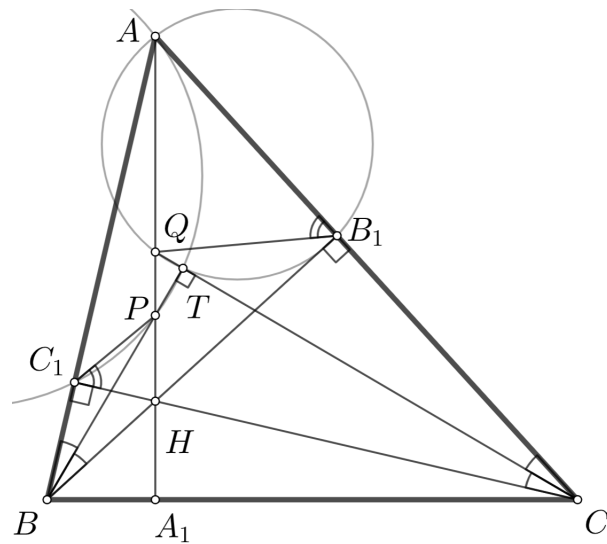
Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что

$$\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90^\circ - \angle QB_1H.$$

Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой 90° (см. рисунок), то есть искомая сумма будет равна 270° .



Способ 1. Окружность, построенная на BC как на диаметре, проходит через точки B_1 и C_1 , а биссектрисы вписанных углов B_1BC_1 и B_1CC_1 проходят через середину дуги B_1C_1 , на которую они опираются; обозначим её через T . Таким образом, T — это точка пересечения прямых BP и CQ .



Поскольку

$$\angle BTC_1 = \angle BCC_1 = \angle BAA_1,$$

то точки A, T, P, C_1 лежат на одной окружности. Аналогично точки A, T, Q, B_1 лежат на одной окружности.

Тогда

$$\begin{aligned} \angle AC_1P + \angle AB_1Q &= (180^\circ - \angle ATP) + (180^\circ - \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (\angle ATP + \angle ATC) = 360^\circ - (360^\circ - \angle BTC) = \\ &= \angle BTC = 90^\circ, \end{aligned}$$

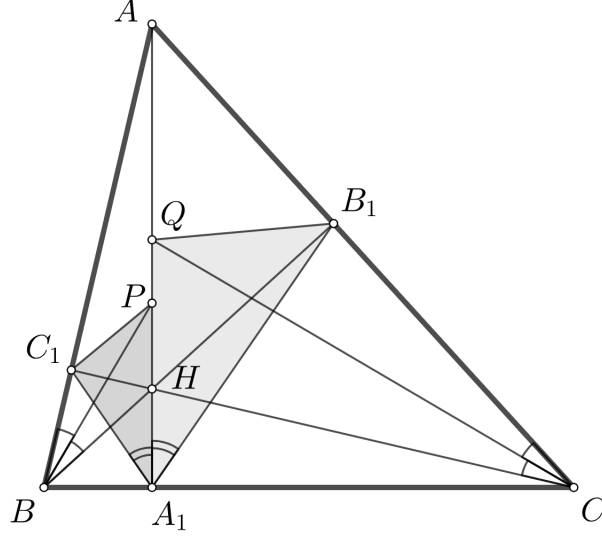
что и требовалось.

Способ 2. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \quad (1)$$



Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC , а следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Воспользуемся ещё одним известным фактом: высота AA_1 — это биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Из того, что $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$ получаем, что треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.

Тогда

$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

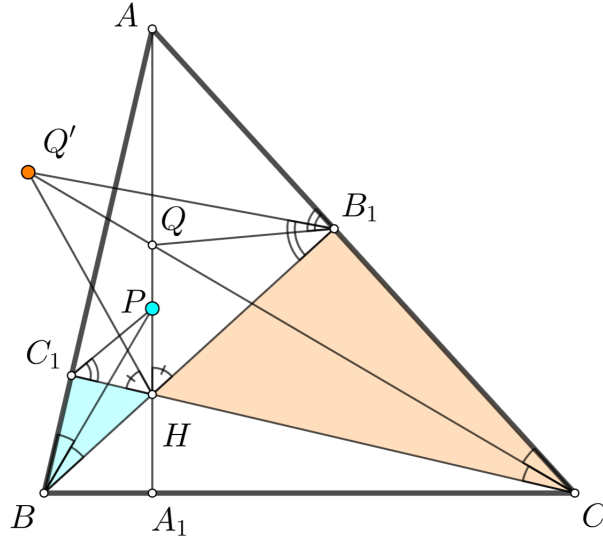
что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Это решение можно переформулировать в терминах инверсии. Рассмотрим композицию инверсии с центром в точке A_1 радиуса $\sqrt{BA_1 \cdot A_1C}$ и симметрии относительно прямой AA_1 . При этой композиции меняются местами точки B и C , A и H . Окружность, построенная на BC как на диаметре, переходит в себя, поэтому точки B_1 и C_1 меняются местами. Если точка P переходит в P' , то по свойству инверсии $\angle PBH = \angle P'CA$, то есть $P' = Q$. Но тогда $\angle PC_1H = \angle QB_1A$, что и требовалось.

Способ 3. Пусть Q' — точка, изогонально сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH . Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то точки P и Q' — соответствующие точки в подобных треугольниках BC_1H и CB_1H . Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.

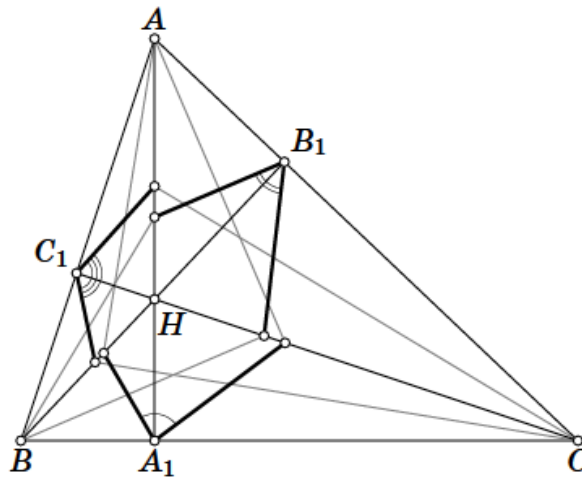


Способ 4. Введём такие обозначения для углов: $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle PC_1H = \varphi$, $\angle AB_1Q = \psi$. Через $\rho(X, \ell)$ будем обозначать расстояние от точки X до прямой ℓ . Воспользовавшись тем, что P лежит на биссектрисе угла ABB_1 , и тем, что $\angle AHC_1 = \gamma$ и $\angle AHB_1 = \beta$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{C_1P \cdot \sin \varphi}{C_1P \cdot \sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, AC_1)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, BB_1)} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Аналогично $\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$, то есть $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$. Поскольку φ и ψ меньше 90° , то равенство их тангенсов равносильно их равенству, то есть $\varphi = \psi$.

Комментарий. Соединим точку A_1 с основаниями биссектрис углов BAH и CAH , то же сделаем для точек B_1 и C_1 . Аналогично доказывается, что сумма полученных углов равна 270° .



6 [10]. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k . Не ошибается ли барон?
(Алексей Волостнов, Станислав Гришин)

Ответ: существует.

Пример 1. Возьмём $f(x) = (x - 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2)(x - 1)x(x + 1)$, $m = 6$, $n = 32$. При нечётном x получаем тогда, что $f(x)$ делится на произведение четырёх последовательных чётных чисел, одно из которых кратно 4. Далее, $f(2) = f(4) = 0$. При $k \geq 3$ имеем: $f(2^k)$ делится на $2^k(2^k - 4)$, что делится на 32. Но $f(6) = 7!$ не делится на 32.

Пример 2. Рассмотрим $f(x) = (x - 3)(x - 9)(x^{18} - 1)$, $m = 6$, $n = 27$. Тогда $f(6)$ не делится на 27. В то же время, если $p = 3$, то p^k даёт остаток 0, 3 или 9 при делении на 27 и $f(p^k)$ делится на 27, а при $p \neq 3$ число $(p^k)^{18} - 1$ делится на 27 по теореме Эйлера.

Замечание. Если добавить условие взаимной простоты чисел n и m , то ответ к задаче изменится на противоположный. В самом деле, предположим, что такое m нашлось. Нетрудно видеть, что в качестве n всегда можно брать степень простого числа. Действительно, если $f(m)$ не делится на n , то оно не делится и на q^l для некоторого простого q , для которого $n = bq^l$. В то же время из равенства $f(p^k) \equiv 0 \pmod{n}$ следует аналогичное равенство и для q^l . Если существует простое число r вида $q^l y + m$, то для него выполняются сравнения $0 \equiv f(r) \equiv f(m) \pmod{q^l}$. Существование такого простого числа следует из известной в теории чисел *теоремы Дирихле* о простых числах в арифметической прогрессии. Она утверждает, что в любой арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d , где натуральные числа a и d взаимно просты, найдётся бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы выходит далеко за рамки школьной программы.

7 [12]. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?
(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)
(Александр Грибалко)

Ответ: $(m - 1)(n - 1) + 1$ доминошек.

Покажем, что как бы Петя ни раскрасил доску, Вася сможет разрезать её так, чтобы получить не более $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек. Он мысленно делит доску на каёмку ширины 1 и на $(m - 1)(n - 1)$ квадратов 2×2 .

Ни один из этих квадратов не может быть окрашен в шахматном порядке, иначе чёрный и белый многоугольники пересекались бы. Поэтому Вася может разрезать каждый из квадратов на две доминошки, хотя бы одна из которых одноцветна.

Докажем, что чёрные и белые клетки каёмки образуют связные множества. Если это не так, то рассмотрим две несоседние чёрные области на каёмке. Между ними есть путь по чёрным клеткам, в котором каждый переход делается в соседнюю по стороне клетку. Этот путь разбивает доску на две части, каждая из которых содержит белые клетки. Но тогда между этими клетками не может быть пути по белым клеткам, то есть белые клетки не образуют многоугольник.

Из доказанного утверждения следует, что если Вася будет резать каёмку на доминошки, начав от границы двух цветов, то получит максимум одну двухцветную доминошку на следующем стыке цветов. Таким образом, всего Вася получит не более $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек.

Теперь покажем, как может Петя покрасить доску, чтобы гарантировать такое количество. Он также мысленно делит доску на те же части, а клетки нумерует числами -1 и 1 в шахматном порядке.

В каёмке Петя красит в чёрный цвет все нижние клетки, кроме самой левой. Столбцы из квадратов 2×2 он нумерует по порядку и в нечётных столбцах красит в чёрный цвет трёхклеточные уголки в каждом квадрате, а в чётных — по одной клетке, как показано на рисунке. Остальные клетки Петя красит в белый цвет.

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Очевидно, что чёрные и белые клетки образуют многоугольники. Кроме того, в каждой области сумма чисел в чёрных клетках равна 1, поэтому во всём чёрном многоугольнике эта сумма равна $(m - 1)(n - 1) + 1$. Так как сумма в каждой доминошке равна нулю, то Вася при разрезании вынужден будет создать не менее $(m - 1)(n - 1) + 1$ двухцветных доминошек.