

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 30 марта 2025 г.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. На плоскости расположены круг и правильный 100-угольник, имеющие одинаковые площади. Какое наибольшее количество вершин 100-угольника может находиться внутри круга (не на границе)?

(С. Дориченко, Б. Френкин)

Ответ: 50.

Решение. Заметим, что 51 вершина не помещается, так как тогда среди них нашлись бы две диаметрально противоположные точки, их можно было бы поместить на диаметр круга, и весь 100-угольник поместился бы в данном круге вместе со своим описанным кругом, площадь которого больше.

Докажем, что 50 вершин поместить можно. Заметим, что диагональ, соединяющая 1-ю и 50-ю вершины — это диаметр вписанного круга 100-угольника, площадь этого круга меньше площади 100-угольника. Поэтому внутри диаметра исходного круга 1-я и 50-я вершины поместятся. Рассмотрим тогда описанную окружность ω нашего 100-угольника. Она не может лежать целиком в исходном круге, а значит, пересекается с окружностью исходного круга в двух точках. Тогда одна из дуг окружности ω (на самом деле меньшая) поместится внутри исходного круга, то есть заведомо поместятся 50 вершин 100-угольника.

2. Дано натуральное число n . Натуральное число m назовём удачным, если найдутся m последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме n следующих за ними натуральных чисел. Докажите, что количество удачных чисел нечётно.

(Б. Френкин, П. Кожеевников)

Решение 1. Ясно, что $m > n$, положим $m = n + k$, где k — натуральное, и будем искать количество подходящих k , то есть таких k , для которых уравнение

$$x + (x + 1) + \dots + (x + k - 1) + ((x + k) + \dots + (x + k + n - 1)) = (x + k + n) + \dots + (x + k + 2n - 1)$$

имеет решение в натуральных x . Преобразуем:

$$x + (x + 1) + \dots + (x + k - 1) = n^2;$$

$$(2x + k - 1)k = 2n^2. \quad (*)$$

Слева в уравнении $(*)$ два сомножителя разной чётности, дающие в произведении $2n^2$, при этом левый сомножитель больше правого. Наоборот, если зафиксировать нечётный делитель d числа $2n^2$, то, зная d , найдём дополнительный делитель $d' = 2n^2/d$, и далее из системы $k = \min\{d, d'\}$, $2x + k - 1 = \max\{d, d'\}$ однозначно находим натуральное x (равное $(|d - d'| + 1)/2$).

Итак, количество подходящих k равно количеству нечётных делителей числа $2n^2$, которое, в свою очередь, равно количеству всех делителей числа s^2 , где (нечётное) s получается из n делением на наибольшую степень двойки, входящую в разложение n . Но количество делителей точного квадрата нечётно (так как все делители числа s^2 , кроме s , можно разбить на пары: $t \leftrightarrow s^2/t$, и только делитель s остаётся без пары).

Решение 2. Очевидно, $m = n + k$, где k натуральное. Запишем равенство из условия в виде

$$(a + 1) + \dots + (a + m) = (a + m + 1) + \dots + (a + m + n).$$

Отсюда

$$a = \frac{n^2}{k} - \frac{k+1}{2}. \quad (**)$$

Чтобы условие задачи выполнялось с данным k , необходимо и достаточно, чтобы a было целым неотрицательным.

Положим $n = s \cdot 2^r$, где s нечётное, r целое неотрицательное. Тогда a будет целым в двух случаях: (а) если оба члена равенства (**) целые; (б) если оба они полуцелые. Первый случай имеет место, когда k — нечётный делитель числа n^2 , то есть делитель числа s^2 . Количество s таких значений k нечётно, поскольку это всевозможные делители полного квадрата. Второй случай означает, что

$$k = d \cdot 2^{2r+1},$$

где d — делитель числа s^2 . Между первым и вторым множеством значений k есть биекция: каждому k из первого множества соответствует число $2n^2/k$ из второго множества, и обратно.

Пусть (f, g) — пара из указанной биекции, причём $f < g$. Тогда при $k = f$ получится неотрицательное a , а при $k = g$ отрицательное. Действительно, в силу (**) требуется проверить неравенство

$$k(k+1) \leq 2n^2.$$

Но $f(f+1) \leq fg = 2n^2$, $g(g+1) > gf = 2n^2$, что и требовалось. Поэтому подходящих значений k будет ровно s , то есть нечётное количество.

3. Пусть A — набор из $n > 1$ различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел $a, b \in A$, где $a < b$, подсчитаем, сколько чисел в A являются делителями числа $b - a$. Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел?

(В. Новиков)

Ответ: $C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Решение. Сначала докажем оценку. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — элементы набора A .

Заметим, что разность вида $a_j - a_i$ при $i < j$ может делиться на a_k лишь при $k < j$.

Выберем любые $1 \leq k < j \leq n$ и посмотрим, сколько из чисел вида $a_j - a_i$ (при $i < j$) может делиться на a_k . Все такие числа при $i \leq k$ отличаются менее, чем на a_k , поэтому на a_k может делиться лишь одно из них. Значит, всего таких разностей может быть максимум $(j - k - 1) + 1 = j - k$. Итого, получаем оценку

$$\sum_{1 \leq k < j \leq n} (j - k) = \sum_{j=2}^n \frac{j(j-1)}{2} = \sum_{j=2}^n C_j^2 = C_{n+1}^3 = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

Это количество достигается, например, на наборе $1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Здесь все неравенства из оценки обращаются в равенства, а значит, и оценка достигается.

Есть и другие примеры, в том числе, в которых все числа набора попарно взаимно простые, скажем, $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 7, \dots, a_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_k + 1$.

4. В трёхмерном координатном пространстве рассмотрим множество всех кубов с целочисленными координатами вершин. Докажите, что в этом множестве существует такое бесконечное подмножество K , что любые два разных куба из K не имеют параллельных рёбер.

(М. Малкин, М. Мееров)

Решение 1. Рассмотрим куб с тремя направляющими векторами рёбер вида (a, b, c) , (b, c, a) , (c, a, b) , где $a = -n$, $b = n + 1$, $c = n(n + 1)$. Здесь a, b, c подобраны с условием $ab + bc + ca = 0$ (или $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$), так что эти три вектора попарно перпендикулярны.

Выбирая $n = 1, 2, 3, \dots$, получим набор кубов без параллельных рёбер (нетрудно проверить, что никакие два соответствующих вектора не пропорциональны).

Замечание. Геометрически можно интерпретировать эту конструкцию так: делается поворот ребер-векторов стандартного единичного куба $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ на подходящий угол вокруг вектора диагонали $(1, 1, 1)$ (так, чтобы координаты новых векторов оказались рациональными) и далее гомотетия с нужным коэффициентом, превращающая рациональные координаты векторов в целые.

Решение 2. Рассмотрим куб с тремя направляющими векторами рёбер вида $(2, 2n, n^2)$, $(2n, n^2 - 2, -2n)$, $(-n^2, 2n, -2)$. Длина каждого ребра равна тогда $n^2 + 2$. Нетрудно проверить, что они взаимно перпендикулярны.

Выбирая $n = 1, 2, 3, \dots$, получим набор кубов без параллельных рёбер (нетрудно проверить, что никакие два соответствующих вектора не пропорциональны).

Решение 3. Основная идея решения состоит в следующем. Мы будем рассматривать кубы с направляющими рёбрами $(0, 0, c)$, $(0, c, 0)$, $(c, 0, 0)$, где в качестве c будем брать длины гипотенуз некоторых прямоугольных треугольников с целыми длинами сторон. Затем будем поворачивать эти кубы сначала относительно оси Oz , а потом — относительно новой (повёрнутой) оси Ox так, чтобы они по-прежнему имели целочисленные вершины и удовлетворяли условию задачи.

Заметим сначала, что на плоскости Oxy имеется бесконечно много квадратов с целыми вершинами и целыми длинами сторон, повёрнутых относительно оси Oz на разные углы больше 0° и меньше 90° — поскольку существует бесконечно много непропорциональных пифагоровых троек. (Для пифагоровой тройки a, b, c , где $a^2 + b^2 = c^2$, рассматриваем квадрат со стороной c , построенный на векторе (a, b) .)

Тогда для исходного и повёрнутого кубов будет только одно направление, в котором есть параллельные рёбра (направление Oz). Рассмотрим теперь для нового куба плоскость α , содержащую старую ось Oz и новую (повёрнутую) ось Oy . Направляющие векторы рёбер куба, лежащих в плоскости α , также задают на ней целочисленную квадратную решётку. В плоскости α тогда тоже есть бесконечно много квадратов с целыми вершинами и целыми длинами сторон, повёрнутых относительно новой оси Ox на угол больше 0° и меньше 90° .

Тогда бесконечное семейство кубов строим так: каждый очередной куб первым поворотом (относительно Oz) делаем таким, чтобы его рёбра были непараллельны ни одному ребру всех предыдущих кубов, кроме рёбер, параллельных Oz , а вторым поворотом добиваемся, чтобы его рёбра были непараллельны вообще ни одному из рёбер предыдущих кубов. Это можно сделать, так как возможных поворотов бесконечное количество, как было сказано выше!

(Или так: можно доказать, что имеются необходимые повороты на сколь угодно малые углы, а тогда перед очередным поворотом можно измерить всевозможные ненулевые углы между рёбрами нового куба и рёбрами предыдущих кубов и повернуть на угол, который меньше всех этих углов. Тогда после первого поворота останется только параллельность направлению Oz , а после второго рёбра разных кубов уже не будут параллельны друг другу.)

Обозначив через A_n множество кубов, построенных на n -м шаге, видим, что каждое очередное множество содержит предыдущее множество и ещё один новый куб. Рассмотрев объединение всех множеств A_n (для $n = 1, 2, 3, \dots$), получим искомым бесконечный набор.

Идея решения 4. Рассмотрим единичный куб с направляющими рёбрами $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$. Будем отражать его относительно таких плоскостей, проходящих через начало коор-

динат, у которых целые коэффициенты в уравнении. Будут получаться кубы с рациональными координатами, так как проекция вектора с рациональными координатами на такую плоскость — тоже вектор с рациональными координатами.

(В самом деле, если уравнение плоскости имеет вид $ax + by + cz = 0$, то перпендикулярный ей вектор имеет координаты (a, b, c) — так как скалярное произведение его и любого вектора в нашей плоскости равно нулю. Рассмотрим вектор с рациональными координатами (p, q, r) . Чтобы спроецировать его на нашу плоскость, надо прибавить к его концу (p, q, r) вектор $\alpha(a, b, c)$, подобрав коэффициент α так, чтобы конец итогового вектора $(p, q, r) + \alpha(a, b, c)$, попал в нашу плоскость. Получаем уравнение

$$a(p + \alpha a) + b(q + \alpha b) + c(r + \alpha c) = 0; \quad \text{то есть} \quad \alpha = -\frac{ap + bq + cr}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Видим, что α рационально, откуда проекция тоже имеет рациональные координаты.)

С помощью гомотетии с центром в начале координат каждый такой куб можно превратить в куб с целыми координатами.

Далее, выбираем бесконечный набор этих плоскостей так, что, отразив относительно них единичный куб, мы получим искомый набор кубов. (Например, выбираем эти плоскости так, чтобы угол между любыми двумя из них был меньше 1 градуса.)

5. По кругу стоит 99 тарелок, на них лежат булочки (на тарелке может быть любое число булочек или вовсе их не быть). Известно, что на любых 20 подряд идущих тарелках лежит суммарно хотя бы k булочек. При этом ни одну булочку ни с одной тарелки нельзя убрать так, чтобы это условие не нарушилось. Какое наибольшее суммарное число булочек может лежать на тарелках?

(В. Ретинский, П. Кожеевников)

Ответ: $9k$ булочек.

Пример. Пронумеруем тарелки по кругу и положим по k булочек на тарелки, номера которых делятся на 11. Остальные тарелки будут пустыми. Тогда для каждой непустой тарелки найдутся 20 подряд идущих тарелок, среди которых она — единственная непустая. Поэтому булочку с неё снять нельзя.

Оценка. Пусть ни одной булочки убрать нельзя. Тогда для каждой непустой тарелки A есть цепочка из 20 тарелок, содержащая A , в которой суммарно ровно k булочек. Рассмотрим все такие цепочки.

Докажем, что если цепочек не меньше 10, то одна из цепочек покрыта остальными. Предположим противное, возьмём тогда 10 цепочек и выделим в каждой из них тарелку, не покрытую остальными цепочками. Обозначим эти тарелки $T_1, T_2, \dots, T_{10}$, двигаясь по часовой стрелке, так что T_i принадлежит цепочке C_i . Тогда каждая тарелка на дуге между соседними T_i и T_{i+1} принадлежит не более чем двум цепочкам — C_i и C_{i+1} . Отсюда $10 \cdot 20 = |C_1| + |C_2| + \dots + |C_{10}| \leq 2 \cdot 99 - 10$. Противоречие.

Если одна цепочка покрыта остальными, выбросим её. Продолжая так далее, дойдем до ситуации, когда у нас (различных) цепочек не более 9 и эти цепочки покрывают все непустые тарелки. Тогда в них не более $9k$ булочек, тем самым оценка доказана.

Вариация оценки. Пусть ни одной булочки убрать нельзя. Тогда для каждой непустой тарелки A есть цепочка из 20 тарелок, содержащая A , в которой всего ровно k булочек. Если такая цепочка граничит с пустой тарелкой, то можно рассмотреть новую цепочку — эту пустую тарелку добавить, а одну тарелку с противоположного края удалить, и в новой цепочке

будет не более k булочек, а значит, ровно k булочек. Двигаясь так по кругу, получим, что любая тарелка (не только непустая) входит в какую-то цепочку, содержащую ровно k булочек. Рассмотрим все такие цепочки. Вместе они покрывают все 99 тарелок.

Заметим, что если какая-то тарелка принадлежит сразу трём цепочкам, то одна из этих трёх цепочек содержится в объединении двух других (тут мы используем, что цепочки «не слишком длинные» — три цепочки не могут покрыть весь круг) и такую цепочку можно выкинуть, сохранив условие «цепочки покрывают все тарелки». Действуя так, можно добиться ситуации, когда никакие три цепочки не имеют общей тарелки. Тогда перекрываются между собой только «соседние» цепочки.

Занумеруем цепочки, идя по кругу. Если цепочек хотя бы 10, то имеется 5 неперекрывающихся цепочек длины 20 (например, цепочки с нечётными номерами), что невозможно, так как всего тарелок меньше 100. Значит, цепочек не более 9, а тогда булочек не более $9k$.

6. Дан треугольник ABC . Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA , а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C . Окружность CPW пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB , в точке Q . Докажите, что $LC = LQ$.
(А. Заславский)

Решение 1. Известно, что точка P — пересечение медианы с дугой AHB . Пусть R — середина этой дуги, M — середина AB . Точки P' и R' , симметричные P и R относительно M , лежат на окружности ABC ; отсюда $MP \cdot MC = MP' \cdot MC = MR' \cdot MW = MR \cdot MW$, то есть R лежит на окружности CPW .

Далее, поскольку $CW \perp CL$, луч CL пересекает окружность $CPRW$ в точке U , диаметрально противоположной W , откуда $UR \parallel BC$. Тогда ML — средняя линия в треугольнике $RR'U$, то есть L — середина $R'U$. Поэтому во вписанной трапеции $RUCQ$ общий серединный перпендикуляр к RU и CQ проходит через L , откуда и следует требуемое.

Решение 2. Пусть Q' — такая точка на прямой CQ , что $CQ' = CL$. Докажем, что C , P , Q' , W лежат на одной окружности. Рассмотрим композицию инверсии с центром C и симметрии относительно CL , меняющую местами точки A и B . Она также меняет местами прямую AB и описанную окружность треугольника, поэтому L переходит в середину U дуги AB , W в основание K внешней биссектрисы угла C , а точка Шалтая P в точку пересечения касательных в точках A и B . Далее, прямая CQ переходит в касательную к описанной окружности в точке C , а окружность с центром L , проходящая через C в серединный перпендикуляр к CU (поскольку образы точек C и U инверсны относительно этой окружности). Следовательно, Q' переходит в точку пересечения касательных в точках C и U .

Эта точка вместе с образом точки P и точкой K лежат на одной прямой — поляре точки L относительно окружности ABC , откуда и получаем искомое утверждение.