

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ ВЕСЕННИЙ ТУР

Базовый вариант

8 – 9 классы

1 [4]. На доску записали числа $1, 2, \dots, 100$. Далее за ход стирают любые два числа a и b , где $a \geq b > 0$, и пишут вместо них одно число $[a/b]$. После 99 ходов на доске останется одно число. Каким наибольшим оно может быть? (Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x .)

(Егор Бакаев)

Ответ: 100. Очевидно, что все числа на доске всегда не меньше 1 и не больше 100. Применяя указанную операцию к парам $(99, 98), (97, 96), \dots, (3, 2)$, оставим на доске число 100 и 50 единиц. Далее каждый ход убирает одну единицу.

2 [5]. В классе N школьников, среди них образовалось несколько компаний. Общительностью школьника назовём количество людей в наибольшей компании, куда он входит (если ни в одну не входит, то общительность равна 1). Оказалось, что у всех девочек в классе общительность разная. Каково наибольшее возможное количество девочек в классе?

(Борис Френкин)

Ответ: $\left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$ девочек. Уточним, что под наибольшей компанией для школьника подразумевается компания с наибольшим числом школьников в ней (таких может быть несколько).

Оценка. Пусть в классе k девочек. Девочка с наибольшей общительностью входит в компанию, где не меньше k человек. Других девочек в этой компании нет. Значит, в классе не менее $k - 1$ мальчиков. Следовательно, $k + (k - 1) \leq N$, то есть $k \leq \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$.

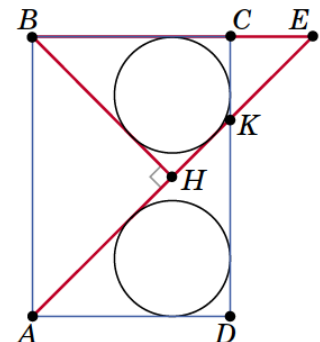
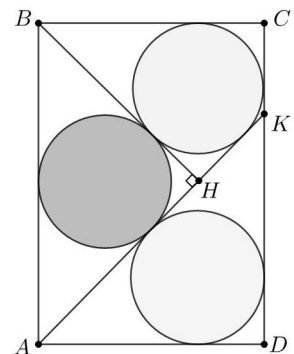
Пример. При $k = \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor$ занумеруем девочек числами от 1 до k , мальчиков — числами от $k + 1$ до N и создадим k компаний: в i -ю компанию входят i -я девочка и $i - 1$ мальчиков с наименьшими номерами.

3 [5]. На стороне CD прямоугольника $ABCD$ взята точка K . Из вершины B опустили перпендикуляр BH на отрезок AK . Оказалось, что отрезки AK и BH делят прямоугольник на три части, в каждую из которых можно вписать круг (см. рисунок). Докажите, что если круги, касающиеся стороны CD , равны, то и третий круг им равен.

(Михаил Евдокимов)

Уточним, что точки H и K предполагаются различными, как на рисунке (иначе утверждение задачи неверно).

Продлим отрезок AK до пересечения с прямой BC в точке E . Два правых круга симметричны относительно горизонтальной средней линии нашего прямоугольника. Значит, углы CBH и DAN равны, то есть AHB — равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому и BHE — равнобедренный прямоугольный треугольник, равный треугольнику AHB . А окружности, вписанные в равные треугольники, равны.



4 [6]. По кругу стоят кувшины с соками, не обязательно одинакового размера. Из любого кувшина разрешается переливать любую часть сока (возможно, нисколько или весь сок) в соседний кувшин справа, так чтобы тот не переполнился и сладость смеси в нём стала равна 10%. Известно, что в начальный момент такое переливание удалось бы сделать из любого кувшина. Докажите, что можно сделать в каком-то порядке несколько таких переливаний (не более одного из каждого кувшина), так чтобы сладость смеси во всех непустых кувшинах стала равна 10%. (Сладость – это процент сахара в смеси, по весу. Сахар всегда равномерно распределён в кувшине.)

(Александр Шаповалов)

При смешивании двух соков получается какая-то промежуточная сладость между сладостями этих соков. Назовём кувшин *нормальным*, если он пустой или сладость в нём равна 10%; *кислым* — если сладость в нём меньше 10%, *сладким* — если больше. Аналогично дадим название чану, куда мысленно сольём весь сок.

Решение 1. Если какой-то кувшин нормальный, то переливание из него не изменит название кувшина справа. Значит, справа тоже нормальный кувшин, и так далее. Тогда все кувшины нормальные и переливаний не требуется.

Иначе имеем чередование кислых и сладких кувшинов (в частности, всего кувшинов чётное количество). Разобьём кувшины на пары соседних, чтобы левый кувшин пары был кислым. Переливанием в каждой паре сделаем сладкий кувшин нормальным. Значит, чан кислый или нормальный. Если бы разбили на пары по-другому, то получили бы сладкий или нормальный чан. Следовательно, чан нормальный и все левые кувшины в парах опустели.

Решение 2. Занумеруем кувшины по кругу так, что изначально в 1-м можно сделать 10%-ю сладость с помощью 2-го, во 2-м — с помощью 3-го, и так далее, в $(n-1)$ -м кувшине — с помощью n -го, в n -м — с помощью 1-го.

Тогда сделаем 1-й кувшин нормальным с помощью 2-го. Во 2-м кувшине сладость осталась та же, только сока могло стать меньше, значит, его всё ещё можно сделать нормальным с помощью 3-го кувшина. Сделаем. Аналогично сделаем нормальными все кувшины, кроме n -го. Если чан сладкий, то n -й кувшин тоже стал сладким, но тогда он и был сладким (из него ведь просто отлили часть сока). Начав процесс с другого кувшина, выясняем, что все кувшины были сладкими. Но тогда нельзя было выполнить ни одного переливания. Аналогичную ситуацию получаем, если чан кислый. Следовательно, чан нормальный. Тогда и n -й кувшин стал нормальным, и мы добились требуемого.

5 [6]. Прямоугольная клетчатая доска покрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета и разбита на доминошки 1×2 . Везде, где граничат по стороне горизонтальная и вертикальная доминошки, стоит дверка. Она покрашена в тот же цвет, что и примыкающая клетка той доминошки, которая примыкает короткой стороной. Обязательно ли белых дверок столько же, сколько чёрных?

(Борис Френкин)

Ответ: обязательно.

Решение 1. Рассмотрим стороны клеток на границе доски. Среди них поровну белых и чёрных (так как у доски есть чётная сторона). Каждая длинная сторона доминошки, выходящая на границу, даёт вклад из одной белой и одной чёрной стороны клетки. Тогда и среди коротких сторон, выходящих на границу, поровну белых и чёрных сторон клеток. Поэтому,

если мы сделаем новые дверки наружу в каждой короткой стороне доминошки, прилегающей к краю доски, то добавлено будет одинаковое количество белых и чёрных дверок.

Рассмотрим теперь произвольную клетчатую вертикаль (толщиной в одну клетку) и объединим в ней примыкающие друг к другу вертикальные доминошки в вертикальные полосы. В каждой получившейся полоске (если они есть) ровно две «горизонтальные» дверки, причём разного цвета (поскольку длина полосы чётна). Тогда в каждой вертикали поровну чёрных и белых дверок. То же верно и для горизонталей, а значит, и для всей доски.

Решение 2. Рассмотрим вертикальную прямую B , проходящую по границам клеток. Покажем, что на ней одинаковое количество белых и чёрных дверей.

Будем двигаться по B от самой нижней горизонтали к самой верхней. Без ограничения общности пусть первая встретившаяся дверь D_1 — белая. До этого все доминошки, примыкающие к B , начинались и кончались на одних и тех же горизонталях (какие-то горизонтальные доминошки могли пересекать B). Поэтому вертикальная доминошка, примыкающая к D_1 , закончится на 1 клетку выше, чем горизонтальная. Если по другую сторону от B стоит вертикальная доминошка, то она закончится ещё на 1 клетку выше, и т.д. Рано или поздно доминошки с обеих сторон от B закончатся на одинаковой высоте (на краю доски или раньше). Значит, встретится горизонтальная доминошка, напротив которой расположена верхняя клетка вертикальной доминошки, то есть мы придём к следующей двери D_2 (это могло произойти и сразу после двери D_1). В каждой из пройденных вертикальных доминошек нижняя клетка белая, а верхняя чёрная. Поэтому дверь D_2 чёрная.

Дальнейшее движение по прямой B происходит аналогично. Таким образом, белые и чёрные двери расположены на B парами. Аналогичное верно и для горизонтальных прямых. Отсюда следует ответ. (Из доказанного также следует, что общее количество дверей на вертикальных прямых чётно, как и на горизонтальных.)