

46-й ТУРНИР ГОРОДОВ, ОСЕННИЙ ТУР

Решения сложного варианта

8 – 9 классы

1 (4 балла). Барон Мюнхгаузен взял несколько карточек и написал на каждой по натуральному числу (числа могут повторяться). Барон утверждает, что использовал только две различные цифры, зато когда он для каждой пары карточек нашёл сумму чисел на них, то среди первых цифр этих сумм встретились все цифры от 1 до 9. Могут ли слова барона быть правдой?

(Максим Дидин)

Ответ: могут. Годаются цифры 2 и 6. Напишем, например, числа 6, 22, 26, 26, 62, 66. Приведём для каждой цифры от 1 до 9 сумму с этой первой цифрой:

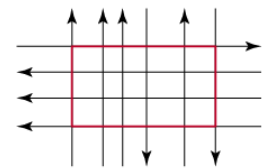
$$128=62+66; 28=22+6; 32=26+6; 48=22+26; 52=26+26; 68=62+6; 72=66+6; 88=62+26; 92=66+26.$$

Замечание. Можно доказать, что примеров с другими цифрами нет.

2 (6 баллов). Петя и Вася по очереди проводят дороги на плоскости, начинает Петя. Дорога — это горизонтальная или вертикальная прямая, по которой можно двигаться только в одну сторону (выбранную при создании дороги). Всегда ли Вася может действовать так, чтобы после любого его хода можно было проехать по правилам от любого перекрёстка дорог до любого другого, как бы ни действовал Петя?

(Александр Перепечко)

Ответ: всегда. Пусть, пока все дороги параллельны, Вася сохраняет это, следя за тем, чтобы крайние дороги были разных направлений. Когда Петя проведёт пересекающую их дорогу, Вася с одной из сторон от неё проводит дорогу противоположного направления так, чтобы возник большой цикл (цикл из четырёх крайних дорог, красный на рисунке).



Далее Вася следит только за крайними дорогами — если они по-прежнему образуют цикл, он проводит любую не крайнюю дорогу (и большой цикл сохраняется), а если Петя испортил большой цикл, проведя крайнюю дорогу, Вася восстанавливает его, проводя рядом с Петевой новую крайнюю дорогу нужного направления.

Докажем, что так Вася добьётся своей цели. Рассмотрим произвольные перекрёстки A и B . Выедем из A на большой цикл, по нему доедем до дороги, которая ведёт к перекрёстку B , и проедем в B .

3 (7 баллов). В остроугольном треугольнике ABC отмечены точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей соответственно. Прямые AI и CI вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках N и M . Отрезки MN и BO пересекаются в точке X . Докажите, что прямые XI и AC перпендикулярны.

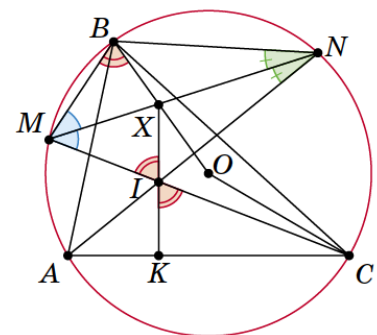
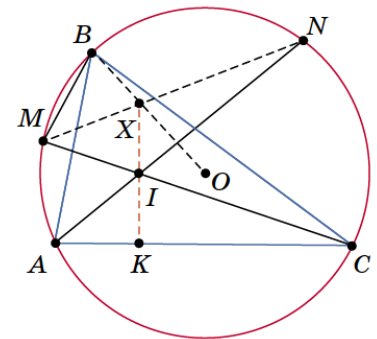
(Фёдор Ивлёв)

Заметим, что M и N — середины дуг AB и BC соответственно. Поэтому треугольники MBN и MIN равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Значит, треугольники MBX и MIK равны по двум сторонам и углу между ними. Тогда

$$\begin{aligned} \angle KIC &= \angle MIX = \angle MBX = \angle MBA + \angle ABO = \\ &= \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle 2C) = 90^\circ - \angle KCI, \end{aligned}$$

то есть угол IKC прямой, что и требовалось.

Замечание. Равенство треугольников MBN и MIN следует также из леммы о трезубце.



4 (4 балла). У 10 детей есть несколько мешков с конфетами. Дети начинают делить конфеты между собой. Каждый по очереди забирает из каждого мешка свою долю и уходит. Доля вычисляется так: делим текущее число конфет в каждом мешке на число оставшихся детей (включая себя), если нацело не поделилось — округляем до целого в меньшую сторону. Может ли всем достаться разное количество конфет,

а) (5 баллов) если мешков всего 8;

б) (3 балла) если мешков всего 9?

(Алексей Глебов)

а) Ответ: нет. Если из одного мешка убрать 10 конфет, то каждый получит из этого мешка на одну конфету меньше, что не скажется на различии результатов. Поэтому можно считать, что в каждом мешке меньше 10 конфет.

Рассмотрим какой-либо мешок. Если в нём изначально было r конфет, то первые $10-r$ детей ничего не возьмут из этого мешка. После этого число детей станет равным r , и далее каждый ребёнок заберёт из мешка ровно по одной конфете. Значит, каждый ребёнок получит из каждого мешка не более одной конфеты, а всего — от 0 до 8 конфет. Но среди 10 чисел от 0 до 8 найдутся два одинаковых.

б) Ответ: да. Пусть число конфет в мешках равно соответственно 9, 8, ..., 1. Так как детей 10, первый ребёнок уйдёт, ничего не взяв ни из одного мешка. Останется 9 детей. Второй ребёнок заберёт только одну конфету из первого мешка. Останется 8 детей, а в мешках — 8, 8, 7, ..., 1 конфет. Третий ребёнок заберёт лишь по одной конфете из первых двух мешков. Останется 7 детей, а в мешках — 7, 7, 7, 6, ..., 1 конфет. И так далее: i -й ребёнок заберёт по одной конфете из первых $i-1$ мешков, где $i = 2, 3, \dots, 10$. В частности, когда очередь дойдёт до 10-го ребёнка, в каждом мешке останется по одной конфете, и он заберёт их все. Итого, дети получают 0, 1, 2, ..., 9 конфет.

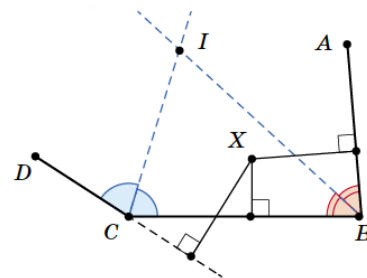
5 (8 баллов). На каждой стороне выпуклого многоугольника построили треугольник, третья вершина которого — пересечение биссектрис двух углов многоугольника, примыкающих к этой стороне. Докажите, что вместе эти треугольники покрывают весь многоугольник.

(Егор Бакаев)

Рассмотрим произвольную точку X внутри многоугольника и докажем, что она покрывается хотя бы одним треугольником.

Первый способ. Опустим из точки X перпендикуляры на все стороны (или их продолжения). Выберем сторону BC , для которой такой перпендикуляр самый короткий. Докажем, что треугольник BCI , построенный на этой стороне, содержит точку X .

Биссектриса состоит из точек угла, которые равноудалены от сторон угла, и делит угол на две части: в каждой из них до одной из сторон ближе, чем до другой. (Это верно для углов, меньших развёрнутого, а у выпуклого многоугольника все углы такие). Поэтому точка X лежит по ту же сторону от биссектрисы BI , что и сторона BC , и по ту же сторону от биссектрисы CI , что и сторона BC , а значит, лежит внутри треугольника BCI .



Второй способ. Предположим противное. Если точка X не покрыта ни одним треугольником, то можно немного сдвинуть её внутри многоугольника так, чтобы она по-прежнему не была покрыта, но вдобавок не лежала бы ни на одной из биссектрис (так как биссектрисы делят многоугольник на конечное число частей). Соединим тогда X со всеми вершинами нашего многоугольника. Каждый угол многоугольника разделится на две неравные части, одна из которых больше половины соответствующего угла, а другая — меньше. Рассмотрим все эти части углов, половина из них «меньшие» и половина «большие». Обойдём углы многоугольника по кругу. Если после меньшей части какого-то угла A идёт меньшая же часть следующего угла B , точка X попадёт внутрь треугольника со стороной AB — противоречие. Значит, за меньшей частью каждого угла следует большая часть следующего, а тогда меньшие и большие части строго чередуются (так как больших и меньших частей поровну). Но тогда расстояние от точки X до сторон многоугольника постоянно увеличивается при обходе по кругу. Сделав полный круг, получим противоречие (расстояние будет больше самого себя).

6 (10 баллов). Назовём ходы коня, при которых он смещается на две клетки по горизонтали и на одну по вертикали, горизонтальными, а остальные — вертикальными. Требуется поставить коня на одну из клеток доски 46×46 , после чего чередовать им горизонтальные и вертикальные ходы. Докажите, что если запрещено посещать клетки более одного раза, то будет сделано не более 2024 ходов.

(Александр Грибалко)

Первое решение. Можно считать, что первый ход был горизонтальным (иначе повернём доску). Разделим доску на 23 вертикальные полосы ширины 2 клетки и раскрасим каждую в белый или чёрный цвет, чередуя цвета полос. Крайние полосы будут одного цвета, пусть чёрного. Тогда белых клеток будет всего $11 \cdot 2 \cdot 46 = 1012$. Заметим, что горизонтальный ход всегда меняет цвет клетки. Пусть всего ходов было хотя бы 2025. Тогда конь посетил 2026 клеток (включая начальную), которые разбиваются на 1013 пар соседних клеток, причём в каждой паре клетки соединены горизонтальным ходом, то есть разного цвета. Тогда белых клеток пройдено минимум 1013, что невозможно.

Второе решение. Пусть первый ход горизонтальный (иначе повернём доску). Покрасим каждую вертикаль в один из 4-х цветов в порядке 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, ..., 1, 2. За три первых хода конь посетит 4 различных цвета. Затем он сместится вертикальным ходом и снова посетит 4 различных цвета и т. д. Сделав 2023 хода, он посетит $44 \cdot 46 = 2024$ клетки, поровну всех цветов. Все непосещённые клетки — цвета 1 и 2. Следующий вертикальный ход ещё возможен, а 2025-й — горизонтальный — уже нет.

Третье решение. Сделаем шахматную раскраску доски, тогда каждым ходом конь меняет цвет. Можно считать, что из чёрных клеток делаются вертикальные ходы, а из белых — горизонтальные. Рассмотрим 4 множества: чёрные клетки 1-й, 5-й, ..., 45-й горизонталей; чёрные клетки 2-й, 6-й, ..., 46-й горизонталей; белые клетки 1-й, 5-й, ..., 45-й вертикалей; белые клетки 2-й, 6-й, ..., 46-й вертикалей. Каждое содержит $23 \cdot 12$ клеток, из которых конь может пойти в $23 \cdot 11$ клеток. Значит, найдутся $23 \cdot 4$ клетки, из которых хода не было. Тогда всего ходов было не более $46 \cdot 46 - 23 \cdot 4 = 2024$.

7 (10 балла). Даны две строго возрастающие последовательности положительных чисел, в которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Известно, что каждая последовательность содержит хотя бы одно число, которого нет в другой последовательности. Какое наибольшее количество общих чисел может быть у этих последовательностей?

(Борис Френкин)

Замечание к условию. Предполагается, что обе последовательности бесконечны, иначе совпадений, очевидно, может быть сколько угодно (можно взять первые n членов последовательности Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... как первую последовательность, и члены со второго по $(n+1)$ -й — как вторую).

Ответ: 2. Правило построения последовательностей назовём просто *правилом*. Пусть два совпадения в последовательностях нашлись, рассмотрим второе. Если предыдущие члены тоже равны, то по правилу одна из последовательностей содержится в другой (так как они бесконечны), что запрещено. Пусть они не равны. Будем считать, что последовательности начинаются с них, и докажем, что теперь совпадение ровно одно. Итак, первая последовательность — $a_1, a_2, \dots$, вторая — $b_1, b_2, \dots$, причём

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3.$$

Складывая первое и третье сравнения, получаем, что $a_1 + a_2 < b_1 + b_2$, то есть, по правилу, $a_3 < b_3$. Складывая второе и четвёртое сравнения, получаем, что $b_1 + b_2 < a_2 + a_3$, то есть, по правилу, $b_3 < a_4$.

Действуя далее аналогично, получаем, что $a_n < b_n$ для каждого $n > 2$ и $b_n < a_{n+1}$ для всех натуральных n . Значит, далее совпадений не будет, поскольку последовательности идут так:

$$a_1 < b_1 < a_2 = b_2 < a_3 < b_3 < a_4 < b_4 < a_5 < \dots$$

Пример. 1, 2, 3, 5, ... и 1, 3, 4, ...

Комментарии. 1. Рассматривать второе (а не первое) совпадающее число требуется лишь для того, чтобы в обеих последовательностях оно было не первым членом. Поэтому если первый член каждой последовательности не содержится в другой, то у последовательностей не более одного общего числа.

2. Если последовательности не обязательно строго возрастают, совпадений может быть три: например, для последовательностей 1, 2, 3, 5, 8, ... и 2, 1, 3, 4, 7, ...