

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

ВЕСЕННИЙ ТУР

Сложный вариант

8 – 9 классы

1 [4]. Учитель назвал две различные ненулевые цифры. Коля хочет составить делящееся на 7 семизначное число, в десятичной записи которого нет других цифр, кроме этих двух. Всегда ли Коля может это сделать, какие бы две цифры ни назвал учитель?

(Алексей Толпыго)

Ответ: не всегда. Если учитель назовет цифры 1 и 8, то каждое число, которое может составить Коля, будет давать тот же остаток от деления на 7, что и число 1111111 (поскольку отличается от Колиного на число, составленное из нулей и семёрок, которое кратно 7). Но число 1111111 на 7 не делится — оно даёт остаток 1 при делении на 7.

Замечание. Ещё одна «плохая» пара — 2 и 9. В остальных случаях Коля может добиться желаемого. Действительно, случай, когда одна из названных цифр равна 7, очевиден. Пусть обе названные цифры a и b отличны от 7, причём $0 < a - b = c \neq 7$. Тогда число $\overline{aaaaaa}$ даёт остаток a при делении на 7. Заметим, что числа $c, 10c, \dots, 10^5c$ дают различные ненулевые остатки при делении на 7, и так как их шесть, то одно из них, скажем, $10^k c$, даёт остаток a при делении на 7. Тогда Коле подходит число $\overline{aaaaaa} - 10^k c$, состоящее из шести цифр a и одной цифры b .

2 [5]. В квадрате 2025×2025 отмечено несколько клеток. За один ход Кирилл может узнать количество отмеченных клеток в любом клетчатом квадрате со стороной меньше 2025 внутри исходного квадрата. Какого наименьшего количества ходов точно хватит, чтобы узнать количество отмеченных клеток во всём квадрате?

(Кирилл Никитин)

Ответ: 5 ходов. Обозначим исходный квадрат через K .

Оценка. Пусть ходов только 4. Ясно, что каждый из соответствующих четырёх квадратов должен содержать свою угловую клетку у K .

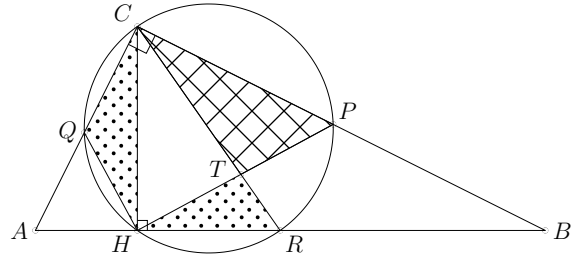
Если квадраты не покрывают K , то Кирилл ничего не узнает о количестве отмеченных клеток среди непокрытых. Если же квадраты покрывают K , то какие-то из них пересекаются (иначе рассмотрим квадрат, содержащий центральную клетку, его сторона не меньше 1013; но тогда стороны остальных квадратов не больше 1012, и взяв из них два квадрата, примыкающих к одной стороне K , видим, что эта сторона покрыта не полностью).

Пусть на каждом ходу отвечали, что отмечена одна клетка. Тогда отмеченных клеток в K могло быть как 4 (все его угловые клетки), так и меньше — когда была отмечена клетка из пересечения двух или более квадратов вместо углов K , попавших в эти квадраты.

Пример. Возьмём: 1) два квадрата со стороной 1013, покрывающие два противоположных угла; 2) центральную клетку; 3) два квадрата со стороной 1012, покрывающие два других противоположных угла. Первые два квадрата пересекаются как раз по центральной клетке, так что по первым трём числам мы узнаем, сколько отмеченных клеток покрывают первые три квадрата. Остальное покрывают (без пересечений) оставшиеся два квадрата.

3 [5]. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH . Некоторая окружность, проходящая через точки C и H , повторно пересекает отрезки AC , CB и BH в точках Q , P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T . Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR ?

(Михаил Евдокимов)



Ответ: эти выражения равны.

Первое решение. Добавим к обеим суммам площадь треугольника RTP . Тогда надо сравнить площадь треугольника PCR и сумму площадей треугольников CHQ и PHR .

Заметим, что PQ и CR — диаметры окружности из условия, поэтому $CPRQ$ — прямоугольник. Площадь треугольника PCR равна половине площади прямоугольника. Но у треугольников PHR и CHQ равные основания PR и CQ , а сумма их высот, опущенных на PR и CQ соответственно, равна стороне PC прямоугольника. Поэтому их суммарная площадь — тоже половина площади прямоугольника.

Второе решение. Добавим к рассматриваемым площадям площадь четырёхугольника $BPTR$. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{BPH} = S_{BRC}.$$

Из вписанности $CPRH$ следует, что $\angle PHR = \angle PCR$. Поскольку PQ — диаметр окружности, то $\angle PHQ = 90^\circ = \angle CHB$, поэтому

$$\angle CHQ = \angle PHR = \angle PCR.$$

Каждый из углов HCQ и CBH дополняет угол BCH до 90° , поэтому

$$\angle HCQ = \angle PBH = \angle RBC.$$

Следовательно, треугольники CQH , BPH и BRC подобны по двум углам. Тогда площади этих треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия, поэтому

$$S_{CQH} + S_{BPH} = \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} + \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 \cdot S_{BRC} = \frac{CH^2 + BH^2}{BC^2} \cdot S_{BRC} = S_{BRC}.$$

4. Даны $2N$ действительных чисел. Известно, что как ни разбей их на две группы по N чисел, произведение чисел первой группы отличается от произведения чисел второй группы не более чем на 2. Верно ли, что как ни расставь эти числа по кругу, найдутся два соседних числа, различающихся не более чем на 2, если а) [3] $N = 50$; б) [5] $N = 25$?

(Илья Богданов)

а) **Ответ:** неверно. Пусть 50 чисел равны 2, а остальные 50 равны -2 . Тогда при любом разбиении их на две группы по 50 чисел произведения в группах будут одинаковы (так как отрицательных чисел чётное количество). Но расставив числа по кругу, чередуя положительные с отрицательными, получим контрпример.

б) **Ответ:** верно. Разобьём числа по кругу на 25 пар соседних чисел. В каждой паре вычтем из большего числа меньшее. Пусть все разности больше 2. Перемножив эти разности, получим число, большее 2^{25} .

Но если в этом произведении разностей раскрыть скобки, то слагаемые (коих будет 2^{25}) можно сгруппировать по парам: произведение каких-то 25 исходных чисел минус произведение 25 оставшихся (будет именно знак минус из-за нечётности числа 25). Пар произведений будет $2^{25} : 2 = 2^{24}$, и их сумма не превосходит 2^{25} по условию. Противоречие.

5 [8]. Имеется 15 неразличимых на вид монет. Известно, что одна из них весит 1 г, две – по 2 г, три – по 3 г, четыре – по 4 г, пять – по 5 г. На монетах есть соответствующие надписи с указанием масс. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, все ли надписи сделаны верно? (Не требуется определять, какие именно надписи верны, а какие нет.)

(Александр Грибалко)

Для обозначения монет будем использовать надписи, которые сделаны на них.

Первое взвешивание: сравним $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3$ и $5 + 5 + 5$. Минимальный возможный вес монет на первой чаше равен 14 г, а максимальный на правой — 15 г. Поэтому если левая чаша легче, то ней именно такой набор монет (возможно, с перепутанными надписями), а на правой — три монеты массой 5 г.

Второе взвешивание: сравним $1 + 4 + 4 + 4 + 5^*$ и $3 + 3 + 3 + 5 + 5$, где 5^* — монета, про которую уже известно, что она весит 5 г, а 5 — монета про которую мы этого не знаем.

Минимальный возможный вес монет на первой чаше — 18 г, а максимальный на правой — 19 г. Значит, если левая чаша легче, то на всех монетах на весах надписи сделаны верно. Тогда на оставшихся монетах 2, 2 и 4 надписи также правильные.

Если хоть одно из взвешиваний даст другой результат, то среди надписей есть ошибочные.

Замечание. В качестве второго взвешивания можно также сравнить $1 + 4 + 4 + 5^* + 5^*$ и $3 + 3 + 3 + 5 + 5$.

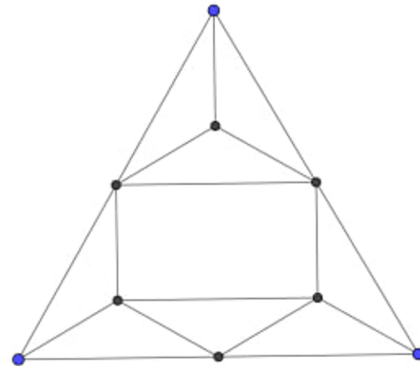
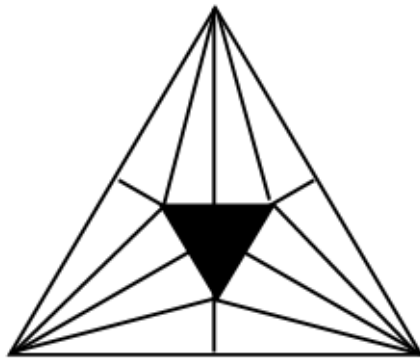
6. Равносторонний треугольник разрезан на белые и чёрные треугольники. Известно, что все белые треугольники — прямоугольные и равны друг другу, а все чёрные — равнобедренные и тоже равны друг другу. Обязательно ли кратны 30° все углы а) [4] у белых треугольников; б) [5] у чёрных треугольников?

(Алексей Заславский)

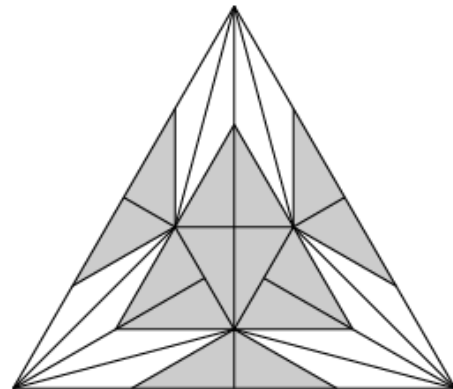
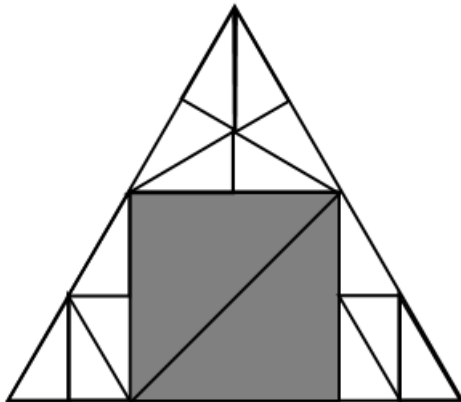
Ответ: не обязательно в обоих пунктах.

а) Контрпример приведён ниже на левом рисунке. Острые углы прямоугольных треугольников равны 15° и 75° .

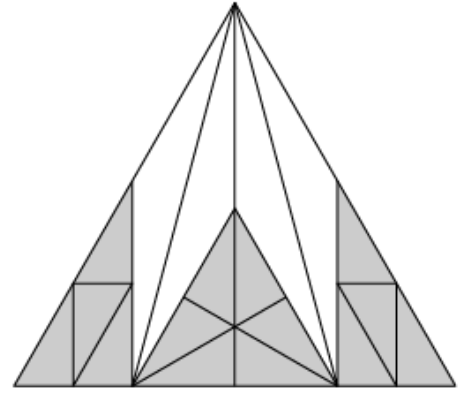
Замечание. Имеется бесконечно много других примеров. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB равностороннего треугольника ABC , и пусть A_1, B_1 — центры треугольников AB_0C_0, BC_0A_0 соответственно. Тогда $A_0B_0A_1B_1$ — прямоугольник, который можно разрезать на прямоугольные треугольники бесконечно многими способами, а остальная часть режется на 8 треугольников с углами $120^\circ, 30^\circ$ и 30° (см. ниже правый рисунок).



б) Ниже приведены два контрпримера. Во втором все 12 равнобедренных треугольников имеют углы $15^\circ, 15^\circ$ и 150° , а все 14 прямоугольных — $90^\circ, 60^\circ$ и 30° .



Третий пример (на рисунке справа) построен так. Возьмём на стороне AB треугольника ABC такие точки U, V , что $\angle ACU = \angle BCV = 15^\circ$, на сторонах AC, BC точки X, Y соответственно, а на биссектрисе угла C точку Z так, что $XU \parallel CZ \parallel YV$, $XU = CZ = YV$. Тогда $CXUZ, CYVZ$ — ромбы, которые можно разрезать на четыре равных треугольника с углами $15^\circ, 15^\circ$ и 150° (или $75^\circ, 75^\circ$ и 30°). Теперь, проведя в прямоугольных треугольниках AUX, BVY средние линии, а в правильном треугольнике UVZ медианы, получим 14 равных прямоугольных треугольников.



7. Хозяйка достала кусок мяса из холодильника, вокруг неё собрались котята. Раз в минуту хозяйка отрезает кусочек мяса и скормливает его одному из котят (на свой выбор), причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли хозяйка скормить котят поровну мяса, если всего котят а) [3] двое; б) [7] трое? (Андрей Кушнир)

Ответы: может в обоих пунктах.

Пусть вес исходного куска равен 1, а вес куска, оставшегося после первого отрезания, равен a . Тогда доля отрезаемого куска каждый раз равна $1 - a$. Значит, вес второго отрезанного куска равен $a(1 - a)$, а вес оставшегося равен $a - a(1 - a) = a^2$, и так далее: после k -того отрезания вес оставшегося куска равен a^k , а вес отрезанного равен $(1 - a)a^k$. Сократив на $(1 - a)$, получим, что задачу можно переформулировать так:

для некоторого a между 0 и 1 и натурального k нужно разбить числа $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ на группы с равными суммами (две группы в пункте а) и три группы в пункте б)).

а) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^2$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1; или можно явно найти этот корень: $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Мы нашли нужное разбиение чисел $1, a, a^2$ на две части с равными суммами: $\{1\}$ и $\{a, a^2\}$. (Тогда, отдав одному котенку первый кусочек, а другому — два следующих, хозяйка получит желаемый результат.)

б) Заметим, что квадратное уравнение $1 = x + x^3$ имеет корень a между 0 и 1 (например, потому, что при $x = 0$ правая часть меньше 1, а при $x = 1$ она больше 1).

Поскольку $1 = a + a^3$, то для любого натурального k выполнено равенство $a^k = a^{k+1} + a^{k+3}$. Тогда

$$1 = a + a^3 = (a^2 + a^4) + a^3 = a^2 + (a^5 + a^7) + (a^4 + a^6) = a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7.$$

Таким образом, для $n = 8$ и указанного a числа $1, a, \dots, a^7$ можно разбить на три группы с равными суммами:

$$\{1\}, \quad \{a, a^3\}, \quad \{a^2, a^4, a^5, a^6, a^7\}.$$

Замечание 1. Существуют и другие разбиения:

$$\begin{aligned} 1 &= a + a^4 + a^6 = a^2 + a^3 + a^5 + a^7, \\ 1 &= a^2 + a^3 + a^4 = a + a^5 + a^6 + a^7. \end{aligned}$$

Замечание 2. Существуют примеры с другим значением a . Например, если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 + a^4 = a + a^2 = a^3 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}.$$

Замечание 3. Для четырёх котиков также существует пример. Если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 = a^2 + a^3 = a + a^5 = a^4 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13}.$$

Замечание 4 (для знатоков). В настоящий момент не известно, разрешима ли задача для $k \geq 5$ котиков. Есть лишь несколько дополнительных соображений, которые могут помочь в анализе общего случая. За каждым разбиением должен стоять неприводимый многочлен (как $a^3 + a - 1$ в решении задачи, или как $a^3 + a^2 - 1$ в замечании 2), на который делятся разности элементов разбиения. Этот многочлен должен иметь действительный корень $a \in (0, 1)$, удовлетворяющий дополнительным условиям. Так как одна из частей разбиения не меньше 1, то сумма остальных частей не меньше $k - 1$. Значит

$$a + a^2 + \dots = \frac{a}{1 - a} > k - 1.$$

То есть корень многочлена должен лежать в интервале $(1 - \frac{1}{k}, 1)$, и не должно быть корней в интервале $(0, 1 - \frac{1}{k})$ (если бы такой корень был, то для него те же части, тоже были бы равны, что невозможно). В частности, это означает что многочлен не может быть возвратным.

Более простым для исследования является случай, когда одна из долей в точности равна 1. Тогда для некоторого n искомый неприводимый многочлен должен быть делителем многочлена

$$a^n + a^{n-1} + \dots + a - (k - 1).$$

Если все многочлены такого вида окажутся неприводимыми, то это будет означать что разбиение на k частей (когда одна из долей равна 1) невозможно. Пока доказательство последнего утверждения известно только для $k = 5$, см. <https://mathoverflow.net/q/490414/5712>