

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 20 октября 2024 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

- 4 1. Петя записал на доске натуральное число. Каждую минуту Вася умножает последнее записанное на доску число на 2 или на 3 и записывает результат на доске. Может ли Петя выбрать начальное число так, чтобы в любой момент среди всех записанных на доске чисел количество начинающихся на 1 или 2 было больше, чем количество начинающихся на 7, 8 или 9, как бы ни действовал Вася?

Максим Дидин

- 6 2. Клетчатую доску 20×20 разбили на двухклеточные доминошки. Докажите, что некоторая прямая содержит центры хотя бы десяти из этих доминошек.

Александр Юран

- 7 3. Известно, что каждый прямоугольный параллелепипед обладает свойством: квадрат его объёма равен произведению площадей трёх его граней, имеющих общую вершину. А существует ли параллелепипед, который обладает этим же свойством, но не является прямоугольным?

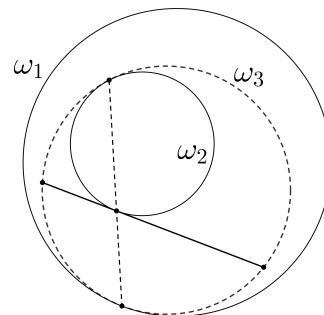
Александр Буфетов

- 8 4. Существует ли такая бесконечная последовательность действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$, что $a_1 = 1$ и для всех натуральных k выполняется равенство

$$a_k = a_{2k} + a_{3k} + a_{4k} + \dots?$$

Илья Лобацкий

- 10 5. Дана окружность ω_1 , а внутри неё — окружность ω_2 . Выбирают произвольную окружность ω_3 , которая касается двух предыдущих, причём оба касания внутренние. Точки касания соединяют отрезком, а через точку пересечения этого отрезка с окружностью ω_2 проводят касательную к ω_2 и получают хорду окружности ω_3 . Докажите, что концы всех таких хорд (полученных при всевозможных выборах окружности ω_3) лежат на фиксированной окружности.



Павел Кожеевников

- 12 6. Замок Мерлина состоит из 100 комнат и 1000 коридоров. Каждый коридор соединяет какие-то две комнаты, каждые две комнаты соединены не более чем одним коридором. Мерлин выдал мудрецам план замка и объявил испытание. Мудрецы должны будут распределиться по комнатам, как хотят. Далее каждую минуту Мерлин указывает коридор, и один из мудрецов переходит по нему из комнаты на любом его конце в комнату на другом его конце. Мерлин победит, если когда-то укажет коридор, на концах которого нет мудрецов.

Число m назовём *волшебным числом замка*, если m мудрецов могут, сговорившись перед испытанием, действовать так, чтобы никогда не проиграть, причём m — минимальное такое число. Чему может равняться волшебное число замка? (Все, включая Мерлина, всегда знают расположение всех мудрецов.)

Тимофей Васильев

- 14 7. На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму единичного круга. Всегда ли можно вбить в стол несколько точечных гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём одинаковым количеством гвоздей? (Вбивать гвозди на границы кругов запрещено.)

Владимир Дольников, Павел Кожеевников