

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 16 марта 2025 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

1. Существует ли такое положительное число $x > 1$, что

5

$$\{x\} > \{x^2\} > \{x^3\} > \dots > \{x^{100}\}?$$

(Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x , то есть разность между x и ближайшим целым числом, не превосходящим x .)

Алексей Толтыго

2. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC . Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC . Оказалось, что рёбра SA , SB , SC первой пирамиды параллельны соответственно граням BCR , ACR и ABR второй пирамиды. Докажите, что объём одной из этих пирамид вдвое больше объёма другой.

6

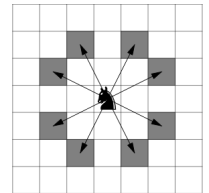
Михаил Евдокимов

3. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других?

7

(Напомним, что шахматный конь бьёт 8 клеток, как показано на рисунке.)

Александр Тертерян



4. В стране, валюта которой — тугрики, ходят только купюры двух целочисленных достоинств. И покупатель, и продавец имеют достаточно много и тех, и других купюр, но при каждом платеже могут использовать вместе не более k купюр (включая сдачу). Известно, что так можно сделать платёж на любую целую сумму от 1 до n тугриков. Каково наибольшее возможное n (в зависимости от k)?

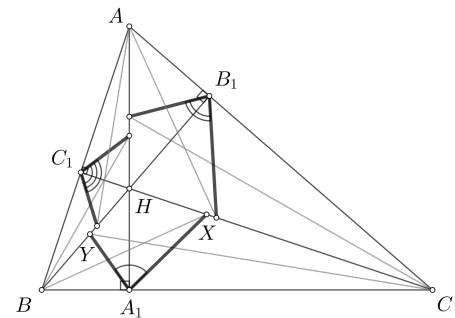
8

Александр Шаповалов

5. Высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Биссектрисы углов B и C треугольника BHC пересекают отрезки CH и BH в точках X и Y соответственно. Обозначим величину угла XA_1Y через α . Аналогично определим β и γ . Найдите значение суммы $\alpha + \beta + \gamma$.

10

Алексей Долененок



6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что существуют многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами и натуральные числа m и n со свойством: $f(m)$ не делится на n , но $f(p^k)$ делится на n для любого простого p и любого натурального k . Не ошибается ли барон?

10

Алексей Волостнов, Станислав Гришин

7. Петя красит каждую клетку доски $2m \times 2n$ в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на доминошки (прямоугольники из двух клеток). Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше двухцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа двухцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася?

12

(Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.)

Александр Грибалко