

СОРОК ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

11 класс, устный тур, 30 марта 2025 года

1. На плоскости расположены круг и правильный 100-угольник, имеющие одинаковые площади. Какое наибольшее количество вершин 100-угольника может находиться внутри круга (не на границе)?

С. Дориченко, Б. Френкин

2. Дано натуральное число n . Натуральное число m назовём *удачным*, если найдутся m последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме n следующих за ними натуральных чисел. Докажите, что количество удачных чисел нечётно.

Б. Френкин, П. Кожевников

3. Пусть A — набор из $n > 1$ различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел $a, b \in A$, где $a < b$, подсчитаем, сколько чисел в A являются делителями числа $b - a$. Какое наибольшее значение может принимать сумма полученных $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел?

В. Новиков

4. В трёхмерном координатном пространстве рассмотрим множество всевозможных кубов с целочисленными координатами вершин. Докажите, что в этом множестве существует такое бесконечное подмножество K , что любые два различных куба из K не имеют параллельных рёбер.

М. Малкин, М. Мееров

5. По кругу стоит 99 тарелок, на них лежат булочки (на тарелке может быть любое число булочек или вовсе их не быть). Известно, что на любых 20 подряд идущих тарелках лежит суммарно хотя бы k булочек. При этом ни одну булочку ни с одной тарелки нельзя убрать так, чтобы это условие не нарушилось. Какое наибольшее суммарное число булочек может лежать на тарелках?

В. Ретинский, П. Кожевников

6. Дан треугольник ABC . Пусть CL — его биссектриса, W — середина дуги BCA , а P — проекция ортоцентра на медиану, проведённую из вершины C . Окружность CPW пересекает прямую, проходящую через C и параллельную AB , в точке Q . Докажите, что $LC = LQ$.

А. Заславский