Задания ПОШ по математике для 10-11 классов
(с решениями)

Задача №1 **(10 баллов)**

Серёжа и Вова играют в интересную математическую игру. В начале игры на доске написано число $\boldsymbol{x} \in (-\mathbf{200};\ \mathbf{200})$. Первым ход делает Серёжа, он пишет на доске число в 2 раза больше написанного. Следующим ходом Вова пишет число на $\boldsymbol{s}$ меньше того, что написал Сережа. Затем Сережа снова удваивает предыдущее (написанное Вовой) число, потом Вова снова вычитает $\boldsymbol{s}$ из предыдущего, и так мальчики ходят поочередно, выписывая в ряд числа. Через несколько ходов они заметили, что число $\boldsymbol{x}$ написано на доске дважды. Найдите все возможные значения $\boldsymbol{x}$, если $\boldsymbol{s} = \mathbf{30}$.

Решение.

Первым ходом Сережа напишет число $2x$, затем Вова напишет $(2x - s)$, затем Сережа напишет $(4x - 2s)$, затем Вова $(4x - 3s)$, затем Сережа $(8x - 6s)$ и так далее. По индукции несложно доказать, что после k-го хода Сережи на доске получается число $2^k x - (2^k - 2)s$, а после хода Вовы $2^k x - (2^k - 1)s$. И по условию одно из этих чисел снова равно x.

Если x получилось после хода Вовы, получается уравнение

$$2^k x - (2^k - 1)s = x \ \Rightarrow\ (2^k - 1)x = (2^k - 1)s \ \Rightarrow\ x = s = 30.$$

Если x получилось после хода Сережи, получается уравнение

$$2^k x - (2^k - 2)s = x \ \Rightarrow\ (2^k - 1)x = (2^k - 2)\mathrm{s}$$

Заметим, что числа $(2^k - 1)$ и $(2^k - 2)$ неотрицательны и взаимно просты, поэтому s должно делиться на $(2^k - 1)$. Положительные делители $s = 30$ – это числа: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, и вид $(2^k - 1)$ среди них имеют 1 (при $k = 1$), 3 (при $k = 2$) и 15 (при $k = 4$).

Рассмотрим эти случаи:

Если $k = 1$, то уравнение принимает вид $1 \cdot x = 0 \cdot s = 0$, откуда $x = 0$.

Если $k = 2$, получаем $3 \cdot x = 2 \cdot s = 60$, значит, $x = 20$.

Если $k = 4$, то $15 \cdot x = 14 \cdot s = 420$, значит $x = 28$.

Ответ: $\mathbf{0}, \mathbf{20}, \mathbf{28}$ и $\mathbf{30}$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Задача не решена, но есть значительные продвижения – 5 баллов*
- *Проведен неполный необоснованный перебор или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №2 **(10 баллов)**

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |\log_2(x+y)| + |\log_2(x-y)| = 3 \\ xy = 3 \end{cases}$$

Решение: Из 2-го уравнения следует, x, y имеют одинаковый знак. Значит, $x, y > 0$, т.к. $x + y > 0$. А т.к. $x - y > 0$, то $x > y > 0$.

<u>1 случай</u>: Если $\log_2(x-y) \geq 0$, то

$$\begin{cases} \log_2(x^2 - y^2) = 3 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{(с учетом вышесказанного)}$$

<u>2 случай</u>: Если $\log_2(x-y) < 0$, но $\log_2(x+y) \geq 0$

$$\begin{cases} \log_2 \dfrac{x+y}{x-y} = 3 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 8 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y = 7x \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7}\sqrt{21} \\ y = \dfrac{1}{3}\sqrt{21} \end{cases} \text{(с учетом вышесказанного)}$$

<u>3 случай</u>: $\log_2(x+y)$ не может быть меньше 0, т.к. $x + y > 1$.

Ответ: $\left\{(\mathbf{3}; \mathbf{1}), \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\sqrt{\mathbf{21}}; \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\sqrt{\mathbf{21}}\right)\right\}$.

Критерии оценивания:

- *Задача решена полностью и обоснованно – 10 баллов*
- *Задача в целом решена, но учтены не все ограничения на ОДЗ или допущена арифметическая ошибка – 8 баллов*
- *Не все модули раскрыты аккуратно, но на ответе это не отразилось – 3 балла*
- *Предъявлено одно из решений без обоснования способа его получения и проверено то, что это решение – 2 балла*
- *Модули раскрыты неаккуратно, не учтены случаи и/или ОДЗ, что привело к неверному ответу – 1 балл*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №3 **(10 баллов)**

По условиям вклада “Миллионер”, сумма на счету ежегодно увеличивается на $\boldsymbol{x}$% (естественно, меньше 100%). По вкладу “Быстрые деньги” начисляются втрое меньшие проценты, но каждые полгода. Оказалось, что при вложении одной и той же суммы через пятнадцать лет на счету “Миллионер” денег будет в полтора раза больше. Определите $\boldsymbol{x}$, ответ округлите до целого числа процентов.

Решение.

Сумма S через 15 лет на счету "Миллионер" превратится в $S \cdot (1+x)^{15}$, а на счету "Быстрые деньги" в $S \cdot \left(1+\frac{x}{3}\right)^{30}$ – при начислении процентов каждые полгода за 15 лет они будут начислены 30 раз. По условию задачи, первая сумма в полтора раза больше:

$$S \cdot (1+x)^{15} = 1{,}5 \cdot S \cdot (1+x/3)^{30}$$

Сокращая на S и извлекая корень пятнадцатой степени, получаем квадратное уравнение

$$1 + x = \sqrt[15]{1{,}5} \cdot \left(1+\frac{x}{3}\right)^2.$$

Решая полученное уравнение, приходим к тому, что с учетом округления $x = 0{,}08989$ и $x = 2{,}67009$, или, округляя до целого числа процентов, 9% и 267%. По условию, x не превосходит 100%, так что оставляем первый корень, $x = 9\%$.

Ответ: $\boldsymbol{x = 9\%}$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Получено верное уравнение, но есть ошибки при вычислении $\sqrt[15]{1{,}5}$ – 9 баллов*
- *Приведено полное обоснованное решение, но допущена одна арифметическая ошибка – 8 баллов*
- *Не учтен существенный элемент условия – 2 балла*
- *Составлено неверное уравнение роста процентов – 1 балл*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований– 0 баллов*

Задача №4 (10 баллов)

Найдите целые $\boldsymbol{m}$, при которых уравнение

$$\boldsymbol{m^3 - 4m^2 + \cos(mx) = 0}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$m^2(m-4) = -\cos(mx).$$

При целых m левая часть будет целой, так что правая тоже, и косинус может быть равен 0 или ± 1. Если предположить, что косинус равен ± 1, то в левой части получается произведение двух целых чисел, равное по модулю 1, так что и оба сомножителя должны быть по модулю равны единице. В частности, $m^2 = 1, m = \pm 1$, но тогда $m - 4$ будет равно -3 или -5, что не равно единице по модулю. Противоречие исключает случай ± 1.

Таким образом, остается единственный вариант – обе части уравнения равны нулю. В этом случае из левой части получается, что $m = 0$ или $m = 4$. Но при $m = 0$ выражение mx также будет равно нулю независимо от x, и косинус в правой части будет равен 1.
Поэтому остается случай $m = 4$, для которого из правой части получается уравнение $\cos 4x = 0$. Решая тригонометрическое уравнение, приходим к $4x = \pi/2 + \pi n$, $x = \pi/8 + \pi n/4$, n – произвольное целое число. Значит, искомое $m = 4$.
Ответ: $\boldsymbol{m = 4}$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Задача не решена, но есть существенные продвижения – 4 балла*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №5 (15 баллов)

В сферу объемом $\boldsymbol{V_1}$ вписан куб со стороной $\boldsymbol{\sqrt{3}}$**,** в который вписана сфера объемом $\boldsymbol{V_2}$, а в эту сферу вписан правильный тетраэдр, в который вписана сфера объемом $\boldsymbol{V_3}$**.** Найти сумму

$$\boldsymbol{2 \cdot V_1 + 2\sqrt{3} \cdot \ V_2 + 54\sqrt{3} \cdot V_3.}$$

РЕШЕНИЕ:

Обозначим радиусы указанных сфер r_1, r_2, r_3 – соответственно.
В тетраэдре высота является одной стороной прямоугольного треугольника, чья гипотенуза является ребром. Если ребро имеет длину x, то другая сторона треугольника имеет длину $\frac{x}{\sqrt{3}}$ (это 2/3 от высоты грани). Поскольку длина высоты равна $r_2 + r_3$, получаем

$$r_2 + r_3 = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{2}$$

Центр тетраэдра лежит на высоте и отрезок длины r_2, соединяющий центр с противоположной вершиной прямоугольного треугольника, является гипотенузой второго прямоугольного треугольника, чьи стороны имеют длины r_3 и $\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Следовательно,

$$r_2^2 - r_3^2 = \frac{x^2}{3}.$$

С учетом двух равенств получаем

$$\begin{cases} r_2 - r_3 = \dfrac{x \cdot \sqrt{6}}{6} \\ r_2 + r_3 = \dfrac{x \cdot \sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

откуда

$$r_2 = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{4}, r_3 = \frac{x \cdot \sqrt{6}}{12}.$$

Обозначим для удобства сторону куба a.

Тогда $r_1 = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2}$ и $r_2 = \frac{a}{2}$.

Поскольку по условию $a = \sqrt{3}$, то

$$r_1 = \frac{3}{2}, r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, r_3 = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

и т.к. объем сферы связан с радиусом соотношением

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

то

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3^3}{2^3} = \frac{9\pi}{2},$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{2^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2},$$

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{6^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{54}.$$

В итоге

$$2 \cdot V_1 + 2\sqrt{3} \cdot V_2 + 54\sqrt{3} \cdot V_3 = 9\pi + 3\pi + 3\pi = \boldsymbol{15\pi}.$$

Ответ: $\boldsymbol{15\pi}$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Задача не решена, но есть существенные продвижения – 7 баллов*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №6 (15 баллов)

Решить в натуральных числах уравнение

$$\boldsymbol{x^2 - 4^{y-1} + 2^y = 4}$$

Решение: Представим уравнение в виде

$$(x - 2^{y-1} + 1)(x + 2^{y-1} - 1) = 3.$$

Так как x и y натуральны, то вторая скобка неотрицательна и не меньше первой. Три – простое число, значит существует единственное разложение 3 на множители, где второй множитель неотрицателен и не меньше первого: $3 = 1 \cdot 3$.
Значит,

$$\begin{cases} x - 2^{y-1} + 1 = 1 \\ x + 2^{y-1} - 1 = 3 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x = 2^{y-1}$. Подставляя во второе уравнение, получаем $2^y - 1 = 3, y = 2$. Тогда $x = 2^{y-1} = 2$.
Ответ: $x = 2, y = 2$.

Критерии оценивания:

- *Задача решена полностью и обоснованно – 15 баллов*
- *Задача решена, но есть арифметические ошибки или ошибочно учтено лишнее решение с $x = -2$ – 9 баллов*
- *В решении присутствует верная идея, но всё полностью не обосновано и не доведено до конца – 6 баллов*
- *Приведен верный ответ без указания метода получения и проведена проверка – 2 балла*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №7 (15 баллов)

В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ углы при вершинах удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{A} : \mathbf{tg}\,\boldsymbol{B} : \mathbf{tg}\,\boldsymbol{C} = \mathbf{1} : \mathbf{1} : (-\mathbf{3}).$$

Найти соотношение сторон $\boldsymbol{a}:\boldsymbol{b}:\boldsymbol{c}$.

Решение:

Для удобства переобозначим $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} y, \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} z$.
Рассмотрим два равенства исходного соотношения

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = 1 : 1, \operatorname{tg} x : \operatorname{tg}(x + y) = 1 : 3$$

(поскольку $z = \pi - x - y$, а $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg}(\pi - x - y) = -\operatorname{tg}(x + y)$). Поскольку $\angle A, \angle B$ – углы в треугольнике, то $x = y, z = \pi - 2x$. Следовательно,

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(2x)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(2x) = 3\operatorname{tg} x$$

По формуле тангенса двойного угла:

$$\operatorname{tg}(2x) = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

получаем

$$3\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

откуда $\operatorname{tg} x = 0$ (что невозможно для угла в треугольник) или

$$3-3\operatorname{tg}^2 x=2$$
$$\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3}.$$
Значит, $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, т.е. $\angle A=\angle B=\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\angle C=\pi-2\angle A=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.
Возвращаясь к треугольнику: a – сторона, лежащая напротив вершины A, b – сторона, лежащая напротив вершины B, c – сторона, лежащая напротив вершины C.
Поскольку
$$\sin A=\sin B=\frac{1}{2},$$
$$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2},$$
то применяя теорему синусов для треугольника ABC и учитывая, что синусы углов треугольника положительны:
$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=1:1:\sqrt{3}.$$
Ответ: $\boldsymbol{a:b:c=1:1:\sqrt{3}}$.

Критерии оценивания:

- *Задача решена полностью и обоснованно – 15 баллов*
- *Задача решена полностью, но допущена арифметическая ошибка – 10 баллов*
- *Задача не решена, но имеются существенные продвижения – 7 баллов*
- *Задача не решена, но имеются некоторые разумные идеи – 3 балла*
- *Задача не решена или дан верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №8 (15 баллов)

В некоторой стране $\boldsymbol{N}$ городов, и каждый город соединен дорогами не менее чем с шестью другими. При каком наибольшем $\boldsymbol{N}$ из этого следует, что из любого города в любой можно проехать по дорогам (возможно, через цепочку промежуточных городов)? Ответ обосновать.

Решение.

Покажем, что при $N=13$ из любого города в любой можно добраться. Назовем *соседями* города, соединенные дорогами непосредственно. Теперь рассмотрим любые два города A и B. Если они соседи – т.е. соединены дорогой непосредственно – по ней и можно проехать. Иначе каждый из них соединен не менее чем с шестью другими – шесть соседей у A и шесть у B. Если предположить, что они все различны, вместе с A и B получается уже 14 городов – противоречие. Следовательно, у A и B есть общий сосед, через который из A в B и можно проехать.

Покажем, что при $N = 14$ возможна ситуация, при которой между некоторыми городами нет цепочки дорог. В самом деле, при этом условии в стране может быть две независимые группы из 7 городов, в каждой из которых каждый город связан с каждым. Тогда у каждого будет ровно по шесть соседей, а связи между группами нет.

Ответ: $N = 13$.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Приведено только доказательство того, что для 13 городов путь существует – 8 баллов*
- *Приведено только доказательство того, что для 14 городов путь не существует – 4 балла*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*