Задания ПОШ по математике для 8-9 классов
(с решениями)

Задача №1 **(10 баллов)**

Кот Леопольд хочет научить мышей считать. Для этого он предложил им выписывать последовательно числа следующим образом. Сначала записывается $\boldsymbol{1}$*, затем* $\boldsymbol{2}$*. А дальше, чтобы получить* $\boldsymbol{n+1}$ *-ое число один мышонок считает остаток* $\boldsymbol{n}$ *-ого при делении на* $\boldsymbol{n+1}$*, а другой прибавляет этот остаток к последнему уже выписанному числу. Как только мыши получают результат они записывают его на доске. Число* $\boldsymbol{k}$ *считается изученным, если мышата увидели на доске* $\boldsymbol{k}$ *одинаковых чисел. Какое наибольшее число позволяет выучить способ Леопольда?*

Решение: Заметим, что каждое следующее записанное число не меньше предыдущего, поэтому одинаковые числа в могут появляться только подряд. Выпишем четыре первых числа: $1, 2, 4, 4$. Таким образом, два одинаковых числа в последовательности есть. Покажем, что больше двух одинаковых чисел подряд в ней быть не может. В самом деле, поскольку любой остаток от деления на t меньше t, n -ое число не превосходит

$$1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = 1 + \frac{n^2 - n}{2}$$

Допустим, n -ое, $(n+1)$ -ое и $(n+2)$ -ое числа на ленте равны одному и тому же m. Тогда m должно делиться на $(n+1)(n+2)$ (поскольку эти два числа взаимно просты и m делится на каждое из них). Но

$$(n+1)(n+2) > 1 + \frac{n^2 - n}{2} \geq \mathrm{m}.$$

Противоречие.

Ответ: **2**

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Приведен неверный ответ или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №2 **(10 баллов)**

Баба-Яга – костяная нога варила приворотное зелье. В его состав входили отвар розовых мухоморов и живая вода. Для определения правильной консистенции Баба-Яга приготовила несколько литровых банок зелья, причем процент отвара мухоморов в каждой следующей банке был на одинаковое ненулевое *количество процентов меньше, чем в предыдущей. Опыты на мышах показали, что правильная консистенция была в третьей банке. Слив в одно ведро содержимое всех банок, кроме последней, Баба-Яга получила такое же зелье, как и в третьей банке. Определить количество банок с зельем.*

Решение: Количество отвара мухомора в банках представляет собой убывающую арифметическую прогрессию. Пусть n – количество банок. Среднее количество отвара (на один литр) в ведре в случае четного количества исходных банок равно количеству отвара в банке с номером $\frac{n}{2}$. В случае нечетного числа исходных банок оно равно полусумме количества отвара в банках с номером $\frac{n-1}{2}$ и $\frac{n+1}{2}$ и не соответствует консистенции ни в одной банке. Так как среднее количество отвара должно соответствовать третьей банке, получаем $\frac{n}{2} = 3, n = 6$.

Ответ: 6.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное и обоснованное решение – 10 баллов*
- *Решение не приведено или дан верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №3 (10 баллов)

Доказать, что для любого натурального числа $\boldsymbol{n}$ *число* $\boldsymbol{n^2+5n+53}$ *не может делиться на* $\mathbf{121}$*.*

Указание: Провести доказательство от противного. Учесть, что если число делится на 121, то оно делится и на 11. Представив число $n^2+5n+53$ в виде $(n-3)(n+8)+77$, разобрать возможные случаи делимости на 11.

Решение: Заметим, что

$$n^2+5n+53 = (n-3)(n+8)+77 = (n-3)^2+11(n-3)+77.$$

Если это число делится на 121, оно делится и на 11. Поскольку второе и третье слагаемые делятся на 11, первое тоже должно делиться на 11. Но, если $(n-3)^2$ делится на 11, то и $(n-3)$ делится на 11. Но тогда первое и второе слагаемые делятся на 121, а третье нет.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное доказательство – 10 баллов*
- *Полное доказательство не приведено, но имеются существенные продвижения – 5 баллов*
- *Приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №4 (15 баллов)

Известно, что для некоторых действительных чисел $\boldsymbol{x}$ *и* $\boldsymbol{y}$ *выполняется равенство*

$$\boldsymbol{x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=2\frac{11}{12}}.$$

Найти число

$$\boldsymbol{xy+\sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2}}.$$

РЕШЕНИЕ:

Обозначим

$$z=x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}.$$

Тогда

$$z^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=\left(\frac{35}{12}\right)^2.$$

Пусть

$$w=xy+\sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2}.$$

Заметим, что

$$1+x^2y^2+x^2+y^2>x^2y^2,$$

поэтому $\sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2}>|xy|$ и, следовательно, w – положительное число.

Возведя w в квадрат, получим

$$w^2=1+2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{1+x^2y^2+x^2+y^2}=z^2+1=$$
$$=\frac{1369}{144}=\left(\frac{37}{12}\right)^2.$$

Отсюда

$$w=\frac{37}{12}.$$

ОТВЕТ: $\frac{37}{12}$.

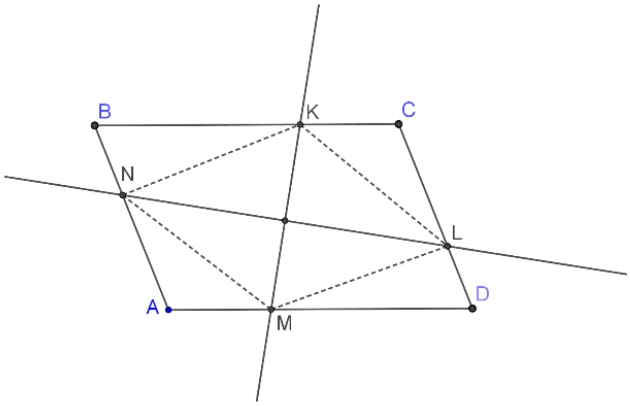
Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Задача не решена, но имеются существенные продвижения – 6 баллов*
- *Приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №5 (15 баллов)

Дан параллелограмм $\boldsymbol{ABCD}$*. Две взаимно-перпендикулярные прямые пересекают стороны* $\boldsymbol{AD}, \boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BC}, \boldsymbol{CD}$ *соответственно в точках* $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}$*. Полученные внутри параллелограмма четырехугольники имеют равные площади. Известно, что* $\boldsymbol{\cos\angle D = \frac{5}{16}}$*,* $\boldsymbol{AD = 9, CD = 6}$*. Найти* $\boldsymbol{MD}$ *и* $\boldsymbol{LD}$*.*

Решение: Прямые MK и NL пересекаются в центре симметрии параллелограмма (точка O), т.к. любая прямая, делящая параллелограмм на две равновеликие части, проходит через его центр симметрии. Значит, $MNKL$ – ромб, т.к. его диагонали перпендикулярны и в точке O делятся пополам.



Пусть $MD = x, LD = y$. Тогда $KC = 9 - x, CL = 6 - y$.

Т.к. $S_{OKL} = S_{OLM} \Rightarrow S_{KCL} = S_{MLD} \Rightarrow \frac{1}{2}xy \cdot \sin\angle D = \frac{1}{2}(9 - x)\cdot(6 - y)\cdot\sin\angle D$

$$\Rightarrow xy = (9 - x)\cdot(6 - y) \Rightarrow x = 9 - \frac{3}{2}y$$

$$KL = ML, \qquad ML^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cdot\frac{5}{16}, \quad KL^2 = (9 - x)^2 + (6 - y)^2 + 2xy\cdot\frac{5}{16}$$

$$\left(9 - \frac{3}{2}y\right)^2 + y^2 - \frac{5}{8}y\cdot\left(9 - \frac{3}{2}y\right) = \left(\frac{3}{2}y\right)^2 + (6 - y)^2 + \frac{5}{8}y\cdot\left(9 - \frac{3}{2}y\right) \quad \Rightarrow$$

$$3y^2 - 58y + 72 = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 18 \quad \text{не подходит} \\ y_2 = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$x = 9 - \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 7$$

Ответ: $\boldsymbol{MD = 7, LD = \frac{4}{3}}$

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Приведено решение, в котором некоторые факты не обоснованы, но в целом задача решена – 10 баллов*
- *Задача не решена, но есть существенные продвижения – 6 баллов*
- *Приведен верный ответ без обоснований или задача не решена – 0 баллов*

Задача №6 **(10 баллов)**

Одноклассницы, встретившие вместе Новый Год, обсуждают кого из общих знакомых они поздравили с праздником. Каждая из них сделала по три высказывания, но только два из них были верными, а третье неверно:

1-я: «Мы поздравили Вову, Катю и Оксану».

2-я: «Мы поздравили Вову, но не поздравили ни Катю, ни Сергея».

3-я: «Мы не поздравили ни Катю, ни Сергея, ни Оксану».

Выяснить, кого из знакомых они действительно поздравили. Ответ обосновать.

Решение: Поставим каждому высказыванию в соответствие число 1, если оно верное и 0, если оно неверное. Обозначим эти числа буквами:

A – поздравили Вову

B – поздравили Катю

C – поздравили Оксану

D – поздравили Сергея

Тогда сумма чисел, соответствующих высказыванию каждой из одноклассниц, равна 2. Поэтому

$$6 = (A + B + C) + \big(A + (1 - B) + (1 - D)\big) + \big((1 - B) + (1 - C) + (1 - D)\big)$$
$$= 2A + 5 - B - 2D$$

Следовательно, $2(A - D) - B = 1$. Так как правая часть нечетна, в левой части также должно стоять нечетное число, значит $B = 1$. Тогда $A - D = 1$ и так как эти числа принимают значения от 0 до 1, получаем $A = 1, D = 0$.

Подставив полученные результаты в первое высказывание, получаем также, что $C = 0$.

Ответ: Одноклассницы поздравили Вову и Катю, но не поздравили Сергея и Оксану.

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов*
- *Задача не решена, но есть значительные продвижения – 3 балла*
- *Приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №7 **(15 баллов)**

Функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ задана на множестве чисел $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ и для всех x число $\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)$ равно остатку от деления числа $\boldsymbol{x} + \mathbf{1}$ на $\mathbf{5}$. Найти $\boldsymbol{f}(\mathbf{1}) + \boldsymbol{f}(\mathbf{4})$.

Решение. Обозначим остаток от деления числа $a+1$ на 5 через $a \oplus_5 1$.
Пусть $f(0)=b$. Тогда

$$f(b)=f\big(f(0)\big)=1,$$
$$f(1)=f\big(f(b)\big)=b \oplus_5 1,$$
$$f(b \oplus_5 1)=f\big(f(1)\big)=2,$$
$$f(2)=f\big(f(b \oplus_5 1)\big)=b \oplus_5 2.$$

Таким образом, имеем последовательность переходящих друг в друга чисел:

$$0 \to b \to 1 \to \ b \oplus_5 1 \to 2 \to b \oplus_5 2.$$

В этой последовательности не может встретиться двух одинаковых чисел подряд (так как для такого числа c получим $f\big(f(c)\big)=c \neq \ c \oplus_5 1$).
Кроме того, b и $b \oplus_5 1$ не могут совпадать, так как переходят в разные числа. Также $b \neq 2$, так как в этом случае $f(b)=1 \neq \ f(2)=b \oplus_5 2$. Таким образом, возможны только два варианта: $b=3$ и $b=4$. Второй вариант также не возможен, так как тогда $b \oplus_5 1=0$, но $f(b \oplus_5 1)=2 \neq \ f(0)=b$. Заключаем, что $b=3$. Непосредственно проверяется, что в этом случае функция f удовлетворяет условиям задачи. Тогда $f(1)+f(4)=4+2=6$.
Ответ: **6**

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение (в частности ,проведен полный перебор) – 15 баллов*
- *Задача не решена, но имеются значительные продвижения – 8 баллов*
- *Задача не решена, но рассмотрен частный случай – 4 балла*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*

Задача №8 (15 баллов)

*Книжный шкаф Серёжи набит фантастикой и детективами, причем среди них есть книги как в твердой, так и в мягкой обложке, как российских, так и зарубежных авторов. Недавно, делая уборку, Серёжа достал из шкафа все книги и выяснил, что фантастики и детективов у него поровну. Заинтересовавшись, он обнаружил, что и книг в твердой и мягкой обложке одинаковое количество, и книг российских и зарубежных авторов тоже поровну. Но при этом оказалось, что детективов российских авторов в твердой обложке на **7** больше, чем в мягкой обложке. Также оказалось, что детективов российских авторов в твердой обложке на **12** больше, чем фантастики зарубежных авторов в твердой обложке. При этом детективов зарубежных авторов в мягкой обложке у*

Серёжи ***16****. Сколько у него фантастики российских авторов в твердой обложке?*

Решение:

Обозначим количество фантастики и детективов, соответственно, Ф и Д, книги российских и зарубежных авторов – Р и З, а в твердой и мягкой обложке – Т и М. И будем обозначать комбинациями букв количество соответствующих книг, например, РТ – количество книг российских авторов в твердом переплете, а ДЗМ – количество детективов зарубежных авторов в мягком переплете.

Рассмотрим сначала два признака – жанр и обложку. Есть всего четыре варианта – ФТ, ДТ, ФМ, ДМ. Заметим, что, поскольку фантастики и детективов поровну – и те, и другие составляют половину всех книг. Так же и книги в твердой обложке составляют половину всех книг, поэтому их столько же, сколько детективов, Т = Д.

Тогда из

$$Т = ФТ + ДТ \text{ и } Д = ДМ + ДТ$$

получаем ФТ = ДМ.

Теперь добавим третий признак – страну автора:

$$ФТ = ДМ \Rightarrow ФРТ + ФЗТ = ДРМ + ДЗМ \Rightarrow ФРТ - ДЗМ = ДРМ - ФЗТ$$

В условии сказано, что ДРТ = ДРМ + 7 и ДРТ = ФЗТ + 12. Приравнивая, получаем ДРМ + 7 = ФЗТ + 12, откуда ДРМ – ФЗТ = 5. Из равенства выше и ФРТ – ДЗМ = 5, а по условию ДЗМ = 16, так что ФРТ = ДЗМ + 5 = 16 + 5 = 21, и это и есть искомое количество фантастики российских авторов в твердой обложке.

Ответ: 21

Критерии оценивания:

- *Приведено полное обоснованное решение – 15 баллов*
- *Задача не решена, но имеются существенные продвижения – 6 баллов*
- *Задача не решена или приведен верный ответ без обоснований – 0 баллов*