

Задания ПОШ по математике для 8-9 классов

Задача №1 (10 баллов)

Кот Леопольд хочет научить мышей считать. Для этого он предложил им выписывать последовательно числа следующим образом. Сначала записывается 1, затем 2. А дальше, чтобы получить $n + 1$ -ое число один мышонок считает остаток n -ого при делении на $n + 1$, а другой прибавляет этот остаток к последнему уже выписанному числу. Как только мыши получают результат они записывают его на доске. Число k считается изученным, если мышата увидели на доске k одинаковых чисел. Какое наибольшее число позволяет выучить способ Леопольда?

Задача №2 (10 баллов)

Баба-Яга – костяная нога варила приворотное зелье. В его состав входили отвар розовых мухоморов и живая вода. Для определения правильной консистенции Баба-Яга приготовила несколько литровых банок зелья, причем процент отвара мухоморов в каждой следующей банке был на одинаковое ненулевое количество процентов меньше, чем в предыдущей. Опыты на мышах показали, что правильная консистенция была в третьей банке. Слив в одно ведро содержимое всех банок, кроме последней, Баба-Яга получила такое же зелье, как и в третьей банке. Определить количество банок с зельем.

Задача №3 (10 баллов)

Доказать, что для любого натурального числа n число $n^2 + 5n + 53$ не может делиться на 121.

Указание: Провести доказательство от противного. Учесть, что если число делится на 121, то оно делится и на 11. Представив число $n^2 + 5n + 53$ в виде $(n - 3)(n + 8) + 77$, разобрать возможные случаи делимости на 11.

Задача №4 (15 баллов)

Известно, что для некоторых действительных чисел x и y выполняется равенство

$$x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 2\frac{11}{12}.$$

Найти число

$$xy + \sqrt{1+x^2y^2 + x^2 + y^2}.$$

Задача №5 (15 баллов)

Дан параллелограмм $ABCD$. Две взаимно-перпендикулярные прямые пересекают стороны AD, AB, BC, CD соответственно в точках M, N, K, L . Полученные внутри параллелограмма четырехугольники имеют равные площади. Известно, что $\cos \angle D = \frac{5}{16}$, $AD = 9$, $CD = 6$. Найдите MD и LD .

Задача №6 (10 баллов)

Одноклассницы, встретившие вместе Новый Год, обсуждают кого из общих знакомых они поздравили с праздником. Каждая из них сделала по три высказывания, но только два из них были верными, а третье неверно:

1-я: «Мы поздравили Вову, Катю и Оксану».

2-я: «Мы поздравили Вову, но не поздравили ни Катю, ни Сергея».

3-я: «Мы не поздравили ни Катю, ни Сергея, ни Оксану».

Выяснить, кого из знакомых они действительно поздравили. Ответ обосновать.

Задача №7 (15 баллов)

Функция $f(x)$ задана на множестве чисел $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ и для всех x число $f(f(x))$ равно остатку от деления числа $x + 1$ на 5. Найдите $f(1) + f(4)$.

Задача №8 (15 баллов)

Книжный шкаф Серёжи набит фантастикой и детективами, причем среди них есть книги как в твердой, так и в мягкой обложке, как российских, так и зарубежных авторов. Недавно, делая уборку, Серёжа достал из шкафа все книги и выяснил, что фантастики и детективов у него поровну. Заинтересовавшись, он обнаружил, что и книг в твердой и мягкой обложке одинаковое количество, и книг российских и зарубежных авторов тоже поровну. Но при этом оказалось, что детективов российских авторов в твердой обложке на 7 больше, чем в мягкой обложке. Также оказалось, что детективов российских авторов в твердой обложке на 12 больше, чем фантастики зарубежных авторов в твердой обложке. При этом детективов зарубежных авторов в мягкой обложке у Серёжи 16. Сколько у него фантастики российских авторов в твердой обложке?