

ЗАДАЧИ (ЗАОЧНЫЙ ТУР, ПОШ 2022_2023, МАТЕМАТИКА)

1. (10 баллов) В распоряжении имеются монеты номиналом 7 и 17 рублей в неограниченном количестве. Найти минимальное число n такое, что любую сумму в рублях, не меньшую n (т.е. суммы $n, n + 1, n + 2, \dots$), можно получить, взяв некоторые из них.

Ответ: $n = 96$.

2. (10 баллов) При каких натуральных значениях n уравнение

$$n^x + n^y = n^z$$

имеет целочисленные решения (x, y, z) ? В ответе указать значение выражения

$$n + x,$$

где n – наибольшее из возможных и x – соответствует тому решению, для которого $x + y + z = 10$.

Ответ: 5.

3. (10 баллов) Найти значение выражения

$$\frac{x^2}{x^2 + x} + \frac{y^2}{y^2 + 12y} + \frac{z^2}{z^2 + 144z}$$

если известно, что

$$\frac{1}{x + 1} + \frac{12}{y + 12} + \frac{144}{z + 144} = 1$$

Ответ: 2.

4. (10 баллов) Со старта кругового трека по дорожкам различных радиусов (R и r) одновременно начинают движение два велогонщика соответственно, сразу набирая скорость. Предполагается, что каждый велогонщик проезжает целый круг за целое число секунд. Причем первый велогонщик проезжает свою окружность 4 раза, а второй 5 раз не ранее, чем через 2 минуты 9 секунд секунды и не позднее, чем через 2 минуты 27 секунд после старта. Разрыв времени между этими событиями составил не менее 6 секунд. Найдите бóльший радиус, если меньший составляет 30 метров.

Ответ: 40.

5. (12 баллов) Муравей сидит в точке $(0, 0)$ на бесконечной координатной плоскости. Он начинает последовательность движений, каждое длины 1 параллельно либо вертикальной, либо горизонтальной оси. Направление выбирается случайным образом. Движение заканчивается, когда муравей достигает стороны квадрата, вершины которого имеют координаты $(-1, 2), (-1, -2), (3, 2), (3, -2)$. Какова вероятность P того, что муравей остановится на горизонтальной стороне квадрата? В ответе записать число $16 \cdot P$.
Ответ: 6.

6. (10 баллов) Пусть

$$\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{4}$$

Найти наименьшее возможное значение A выражения

$$\sin^4 x + \cos^4 y$$

В ответе указать число, равное $64 \cdot A$.

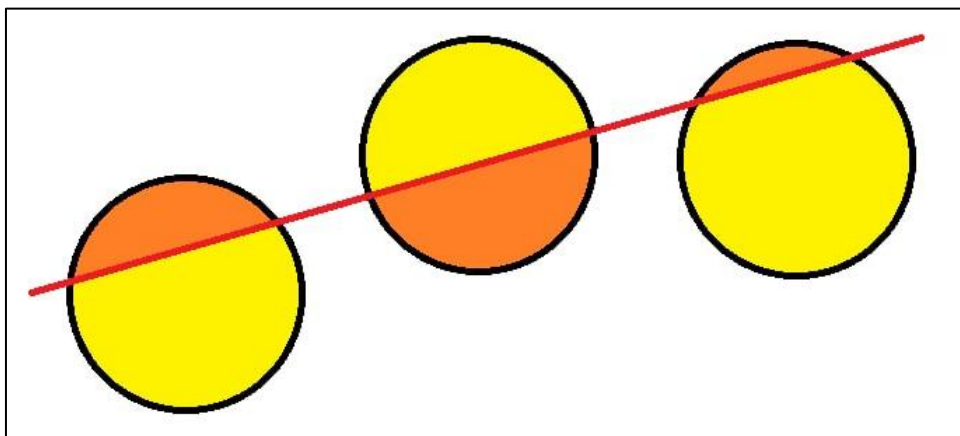
Ответ: 2.

7. (10 баллов) Найти значение

$$X = \sum_{n=1}^7 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi n}{16}$$

Ответ: 35.

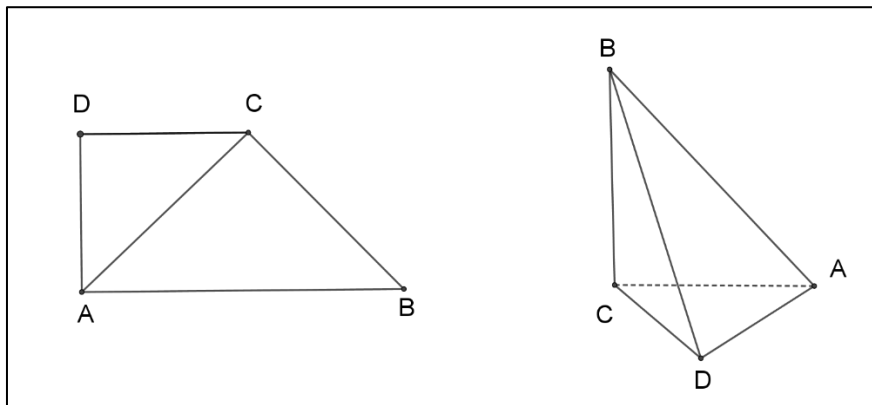
8. (8 баллов) Есть три арбуза (идеальные сферы), семь человек и бесконечно длинный нож. За какое минимальное число разрезов можно разделить эти три арбуза поровну на семерых людей?



(разрез — прямая линия, которая может пересекать несколько арбузов одновременно)

Ответ: 2.

9. (10 баллов) В трапеции $ABCD$, где $AB \parallel CD$, угол CDA равен 90° , $AB = 4$, $AD = CD = 2$. Трапецию согнули по диагонали AC так, чтобы получилась треугольная пирамида $ABCD$, у которой $BD = 2\sqrt{3}$. Чему равен радиус сферы, описанной вокруг получившейся пирамиды?



Ответ: 2.

10. (10 баллов) Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2x + \cos 2y = z^2 + \frac{1}{z^2} \\ x \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi}{y}} + \sqrt{\frac{y}{\pi}} \right)^2 = 243\pi \end{cases}$$

В ответе указать количество решений.

Ответ: 4.