ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»

Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике

Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

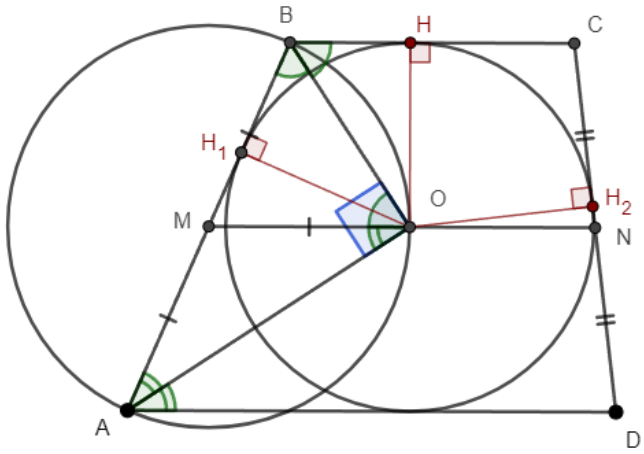
1. В клетчатой доске 100×100 *клеток в каждую клетку записали число, равное сумме номеров строки и столбца, в которых расположена эта клетка (нумерация идёт с левого верхнего угла доски). После этого на доске расположили* 100 *ладей, не бьющих друг друга, и сложили числа в клетках, занятых этими ладьями. Какую сумму можно получить таким образом? Найдите все варианты.*

Решение. Так как ладьи расположены так, что никакие две не бьют друг друга, то в одной строке и в одном столбце не может находиться более одной ладьи. Так как количество ладей совпадает с числом строк и числом столбцов, то каждая строка и каждый столбец содержат ровно одну ладью. Следовательно, в указанной сумме обязательно присутствуют все номера строк и все номера столбцов, причём по одному разу. Поэтому искомая сумма равна

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 100) = 2 \cdot \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 100 = 10\,100.$$

Ответ: 10 100.

2. В трапецию $ABCD$ *вписана окружность. Точки* M *и* N *– середины боковых сторон* AB *и* CD *соответственно. Окружность, построенная на отрезке* AB *как на диаметре, пересекает отрезок* MN *в точке* O*. Найдите площадь трапеции* $ABCD$*, если* $BO = 2\sqrt{5}$*,* $CO = \sqrt{17}$*, а расстояние от точки* O *до прямой* AD *равно 4.*



Решение. MN – средняя линия трапеции $ABCD$, следовательно, $MN||BC$, $MN||AD$. Покажем, что точка O является центром вписанной окружности. Углы CBO и BOM равны как накрест лежащие при $MN||BC$ и секущей BO. Треугольник AOB прямоугольный, так как угол O этого треугольника вписанный и опирается на диаметр AB. MO – его медиана, значит, $BM = MO = AM$. Треугольник MBO – равнобедренный, т.е. углы MBO и BOM равны, а значит, равны и углы CBO и

MBO. Следовательно, BO – биссектриса угла B трапеции $ABCD$. Аналогично доказывается, что AO – биссектриса угла A трапеции $ABCD$, т.е. O – точка пересечения биссектрис, а, значит, центр вписанной окружности.

Пусть $OH_1 \perp AB$, $OH \perp BC$, $OH_2 \perp CD$. Следовательно, $OH_1 = OH = OH_2 = 4$, как радиусы, проведенные в точки касания. По теореме Пифагора из треугольников BOH и COH находим $BH = 2$, $CH = 1$. Тогда $BH_1 = BH = 2$, $CH_2 = CH = 1$ по свойству касательных. Рассмотри треугольник AOB – прямоугольный, $BO^2 = BH_1 \cdot AB$ (метрические соотношения), $AB = 10$. Аналогично, из прямоугольного треугольника COD находим $CD = 17$.

По свойству описанного четырехугольника $AB + CD = BC + AD = 17$. Высота трапеции равна двум радиусам вписанной окружности, поэтому

$$S_{ABCD} = 1/2\,(BC + AD) \cdot h = 1/2 \cdot 17 \cdot 8 = 108.$$

Ответ: 108.

3. Пусть p – простое нечётное число, a, b – натуральные числа и

$$\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} + \ldots + \frac{\frac{p+1}{2}}{p - \frac{p+1}{2}} + \frac{p+1}{2} = \frac{a}{b}.$$

Докажите, что a делится на p.

Доказательство.

$$\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} + \cdots + \frac{\frac{p+1}{2}}{p - \frac{p+1}{2}} + \frac{p+1}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{p-1} + 1\right) + \left(\frac{2}{p-2} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p - \frac{p+1}{2}} + 1\right) =$$

$$= \frac{p}{p-1} + \frac{p}{p-2} + \cdots + \frac{p}{p - \frac{p+1}{2}} =$$

$$= \frac{pc}{(p-1)(p-2)\ldots\left(p - \frac{p+1}{2}\right)} = \frac{a}{b}$$

для некоторого натурального c. Тогда

$$a(p-1)(p-2)\dots\left(p-\frac{p+1}{2}\right)=pbc.$$

Так как числа $p-i$ и p взаимно просты для всех i, $1 \le i \le (p+1)/2$, то a делится на p.

4. В одной школе Владивостока сформировали новый математический класс, в который попали ребята из разных школ после отбора. Известно, что в этом классе для любой группы мальчиков число девочек, учившихся раньше в одной школе вместе с хотя бы одним мальчиком из этой группы, не меньше числа мальчиков данной группы. Учительница решила рассадить детей так, чтобы каждый мальчик сидел за партой вместе с девочкой из его же бышей школы. Сможет ли учительница это сделать?

Решение. Индукцией по n – числу мальчиков в классе, докажем, что это можно сделать. Для $n=1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех чисел, меньших n. Предположим, что условие задачи выполнено, т.е. для любой группы C мальчиков группа C' девочек, учившихся в одной школе вместе с хотя бы одним мальчиком из группы C, не меньше числа мальчиков данной группы из C. Рассмотрим 2 случая.

Существует k и группа A из $k<n$ мальчиков такая, что группа A' состоит ровно из k девочек. Тогда по предположению индукции каждого мальчика из группы A можно посадить вместе с девочкой из группы A'. Покажем, что для оставшихся мальчиков условие задачи будет выполнено. Действительно, для любой группы B мальчиков, не пересекающейся с A, число девочек из группы $(A \cup B)'$ не меньше числа мальчиков из $A \cup B$, следовательно, число девочек из группы B' не меньше числа мальчиков из B, тогда по предположению индукции, каждого мальчика из группы B можно посадить вместе с девочкой из группы B'.

Предположим, что для любого k и любой группы A из $k<n$ мальчиков группа A' состоит более, чем из k девочек. Пусть учительница некоторого мальчика посадила за одну парту с девочкой из бывшей школы этого мальчика. Покажем, что для оставшихся мальчиков и девочек условие задачи будет выполнено. Действительно, для любой группы B из $k<n$ оставшихся мальчиков, число девочек из группы B' больше, следовательно, число оставшихся девочек из группы B' не меньше числа мальчиков из B. Тогда по предположению индукции, каждого мальчика из группы B можно посадить вместе с девочкой из группы B'.

Ответ: да, сможет.

5. Найдите все пары натуральных чисел a, b таких, что $a \neq b$ и числа $a+b$ и $ab+1$ являются степенями 2.

Решение. Заметим, что если пара чисел (a, b) удовлетворяет условию, то и пара (b, a) тоже удовлетворяет. Достаточно рассмотреть только случай $a < b$.

Пусть $a + b = 2^p$, $ab + 1 = 2^q$, где $p, q \in \mathbb{N}$.

Если $a = 1$, то $1 + b = 2^p$ и $b + 1 = 2^q$. Тогда пара $a = 1$, $b = 2^p - 1$ удовлетворяет условию задачи.

Если $a > 1$, то $(a-1)(b-1) \geq 1$. Откуда $ab + 1 \geq a + b$, значит, $(ab+1) \vdots (a+b)$. Тогда

$$1 - a^2 = ab + 1 - (a+b)a \vdots (a+b),$$

поэтому $(a^2 - 1) \vdots (a+b) = 2^p$. Следовательно,

$$(a-1)(a+1) \vdots 2^p.$$

Значит, a – нечетное число и одно из чисел $a-1$ или $a+1$ делится на 2^{p-1}.

Тогда $a = 2^{p-1}t \pm 1$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$. Заметим, что $a < 2^p$, значит, $t \leq 2$.

Если $t = 2$, то $a = 2^p \pm 1$ и подходит вариант только $a = 2^p - 1$, который мы уже рассмотрели выше.

Если $t = 1$, то $a = 2^{p-1} \pm 1$.

Пусть $a = 2^{p-1} + 1$. Тогда $b = 2^p - a = 2^{p-1} - 1$, что противоречит тому, что $a < b$.

Пусть $a = 2^{p-1} - 1$, тогда $b = 2^{p-1} + 1$. Откуда,

$$ab + 1 = (2^{p-1} - 1)(2^{p-1} + 1) + 1 = 2^p,$$

т.е. удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $(1, 2^p - 1)$, $(2^{p-1} - 1, 2^{p-1} + 1)$, $(2^p - 1, 1)$, $(2^{p-1} + 1, 2^{p-1} - 1)$, где $p \in \mathbb{N}$.

6. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ обладает следующим свойством: если t – корень уравнения, то $t^2 - 6$ также является корнем. Найдите наибольшее значение величины $a + b$.

Решение. Пусть $f(t) = t^2 - 6$. Если t и $f(t)$ – корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, то $f\big(f(t)\big)$ – тоже корень, поэтому $f\big(f(t)\big) = f(t)$ или $f\big(f(t)\big) = t$.

В первом случае для $p = f(t)$ получаем $p^2 - 6 = p$. Корнями этого уравнения являются $p = -2$ и $p = 3$. Если $p = -2$, то $t = \pm 2$, поэтому

$$x^2 + ax + b = (x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

или

$$x^2 + ax + b = (x+2)(x+2) = x^2 + 4x + 4.$$

Таким образом, $a + b = -4$ или $a + b = 8$.

Для $p = 3$ аналогично находим $t = \pm 3$, $a + b = -9$ или $a + b = 3$.

Во втором случае

$$t^4 - 12t^2 - t + 30 = 0,$$

$$(t+2)(t-3)(t^2 + t - 5) = 0.$$

Корни $t = -2$ и $t = 3$ рассмотрены выше. Если t – корень уравнения

$$t^2 + t - 5 = 0,$$

то

$$t^2 + at + b = t^2 + t - 5,$$

поэтому $a + b = 1 - 5 = -4$.

Таким образом, наибольшее значение $a + b$ равно 8.

Ответ: 8.