

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике
Заключительный этап, 2023–2024 учебный год

1. В клетчатой доске 100×100 клеток в каждую клетку записали число, равное сумме номеров строки и столбца, в которых расположена эта клетка (нумерация идёт с левого верхнего угла доски). После этого на доске расположили 100 ладей, не бьющих друг друга, и сложили числа в клетках, занятых этими ладьями. Какую сумму можно получить таким образом? Найдите все варианты.

2. В трапецию $ABCD$ вписана окружность. Точки M и N – середины боковых сторон AB и CD соответственно. Окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, пересекает отрезок MN в точке O . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BO = 2\sqrt{5}$, $CO = \sqrt{17}$, а расстояние от точки O до прямой AD равно 4.

3. Пусть p – простое нечётное число, a, b – натуральные числа и

$$\frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} + \dots + \frac{\frac{p+1}{2}}{p - \frac{p+1}{2}} + \frac{p+1}{2} = \frac{a}{b}.$$

Докажите, что a делится на p .

4. В одной школе Владивостока сформировали новый математический класс, в который попали ребята из разных школ после отбора. Известно, что в этом классе для любой группы мальчиков число девочек, учившихся раньше в одной школе вместе с хотя бы одним мальчиком из этой группы, не меньше числа мальчиков данной группы. Учительница решила рассадить детей так, чтобы каждый мальчик сидел за партой вместе с девочкой из его же бывшей школы. Сможет ли учительница это сделать?

5. Найдите все пары натуральных чисел a, b таких, что $a \neq b$ и числа $a + b$ и $ab + 1$ являются степенями 2.

6. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ обладает следующим свойством: если t – корень уравнения, то $t^2 - 6$ также является корнем. Найдите наибольшее значение величины $a + b$.