

ФГАОУ ВО «Дальневосточный федеральный университет»
Олимпиада школьников «ОКЕАН ЗНАНИЙ» по математике
Отборочный очный этап, 2023–2024 учебный год

К задачам 1-8 необходимо указать полный ответ (если, например, получилось несколько корней, то в ответе нужно перечислить все корни через запятую). К задачам 9-11 нужно привести полное решение и ответ.

1. Найдите все целые решения уравнения

$$x^2 = y^2 + 2y - 8.$$

2. Два рабочих разной квалификации роют яму. Если первый выроет половину ямы и дальше станет копать только второй, то яму они выкопают за 2 ч. 30 мин. Если они станут рыть эту яму вдвоем сразу, то работу они закончат за 1 ч. 12 мин. Какую часть ямы выроет за 20 мин рабочий с меньшей производительностью?

3. Пусть n – натуральное число и $S(n)$ – сумма цифр числа n . Найдите все решения уравнения

$$S(n) + n = 2023.$$

4. У папы в шкафу хранилось более 100 коробок с одинаковым количеством сигар. После вечеринки Вовочки с друзьями количество сигар уменьшилось и осталось по 7 в каждой коробке. Папа купил еще 14 коробок с таким же количеством сигар в каждой, как и раньше. Однако, общее количество сигар оказалось на 3 меньше, чем до вечеринки. Сколько коробок было первоначально?

5. Найдите наименьший корень уравнения

$$|x^2 - 2023| = \sqrt{x + 2023}.$$

6. Найдите всевозможные значения наибольшего общего делителя чисел $a - 3b$ и $b - 3a$, если a и b – натуральные взаимно простые числа.

7. В финал школьного КВН попали команда Эврика и команда Следопыт. В команде Следопыт на одного участника больше, чем в Эврике. Победила команда Эврика. Судили соревнование 3 члена жюри. По окончании турнира игроки обеих команд пожали руки друг другу. Все члены команды победителей пожали руки членам жюри, но не все члены проигравшей команды поблагодарили таким образом жюри за судейство. Всего было сделано 150 рукопожатий. Найдите число членов команды Эврика.

8. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \sqrt{x}}}} = y?$$

Извлечение корня повторяется 2023 раза.

9. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором уравнение

$$a^2 + 14|x| + 3\sqrt{2x^2 + 1} = 4a + 3|4x - 5a|$$

имеет хотя бы одно решение.

10. Как-то ночью Рон и Гермиона гуляли по заколдованному лабиринту и потеряли друг друга. Лабиринт не хотел просто так выпускать ребят и придумал следующее заклятье. Гермиона должна была собрать 100 перьев совы и разложить их на 7 кучек так, чтобы не оказалось двух кучек с одинаковым количеством перьев (пустых кучек быть не может). После чего сова Букля могла взять среднюю по количеству перьев кучку и отнести её Рону. Если Рон после подсчёта перьев в полученной кучке сможет назвать, сколько перьев в каждой кучке у Гермионы, то лабиринт исчезнет и ребята найдут друг друга. Как распределить перья Гермионе, чтобы ребята смогли выбраться из лабиринта? Рон не видит и не слышит Гермиону, Букля может только передать перья.

11. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, BD – диаметр окружности, описанной около четырёхугольника, $BC = CD = 6\sqrt{3}$, $AB = 3\sqrt{6}$. Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник ABD . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника COD .